Algorithmen
zur
Summation rationaler Funktionen

Diplomarbeit im Fach Informatik

Vorgelegt von

Roberto Pirastu
geboren am 25. Dezember 1968 in Cagliari

am 4. November 1992

Lehrstuhl I für Automatentheorie und Formale Sprachen des
Instituts für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung
der Universität Erlangen-Nürnberg

Betreuer: Priv.-Doz. Dr. Volker Strehl

Ich versichere, daß ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und daß die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den 4. November 1992

Vorwort

In dieser Diplomarbeit wird das Problem der Summation rationaler Funktionen behandelt. Es werden allgemeine Aussagen über die Struktur der Lösungen des Problems erläutert, und verschiedene Algorithmen beschrieben, die solche Lösungen berechnen. Durch die eingeführten Begriffe werden diese Verfahren in einer einheitlichen Form dargestellt und verglichen. Das Verfahren von Moenck, das sich als fehlerhaft erwiesen hat, wird korrigiert. Das Verfahren von Abramow wird erweitert, um bestimmte Eigenschaften des Ergebnisses zu sichern.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Priv.-Doz. Dr. Volker Strehl für die aufregende Themenstellung bedanken, sowie für die Unterstützung bei der Anfertigung der Arbeit. Ferner gilt mein Dank besonders Herrn Dr. Peter Paule, der mir einige Aspekte des Problems klarmachte und der durch einen ständigen, ermunternden Kontakt meine Arbeit verfolgte.

Contents

Einleitung

Für verschiedene Gebiete der Mathematik und der Informatik ist das Problem der Summation spezieller Funktionen von großer Bedeutung.

Beispielsweise tritt in der Kombinatorik häufig die klassische Aufgabe auf, für eine Funktion $f(x)$ eine Funktion $g(x)$ zu bestimmen, damit folgende Gleichung für $n > 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = g(n)$$

Das allgemeinere Problem der *indefiniten* Summation besteht darin, eine Lösung $h(x)$ folgender Differenzengleichung zu bestimmen (s. [Bo, Ge, BeO, KePe, Ho]).

$$h(x+1) - h(x) = f(x)$$

Dabei sollen die Funktionen $f(x), h(x)$ und $g(x)$ gewisse Eigenschaften besitzen.

Im Falle von hypergeometrischen Funktionen sind in den letzten Jahren große Fortschritte erzielt worden, welche i. w. auf dem von W. Gosper im Jahre 1978 entwickelten Algorithmus (s. [Go]) basieren.

Da rationale Funktionen einen wichtigen Spezialfall der hypergeometrischen Funktionen darstellen, stellt sich die natürliche Frage, ob spezielle Algorithmen diese Eigenschaft nutzen können.

In der Tat veröffentlichte Moenck im Jahre 1977 (s. [Mo]) eine Methode, die das Problem der Summation rationaler Funktionen in Anlehnung an die Hermite-Integration behandelt. Dieses Verfahren bestimmt eine rationale Lösung $h(x)$ der oben angegebenen Differenzengleichung für die rationale Funktion $f(x)$, falls eine solche existiert. Ansonsten wird eine Zerlegung bestimmt der Form

$$h(x+1) - h(x) = f(x) - r(x)$$

Das Verfahren von Moenck ist auch im System Maple implementiert. Allerdings stellte P. Paule fest, daß einige rationale Funktionen von diesem Programm nicht korrekt behandelt wurden. Im Rahmen dieser Diplomarbeit kommen wir zu dem

Schluß, daß nicht eine fehlerhafte Implementierung, sondern einige Lücken in der Darstellung von Moenck Ursache für dieses Fehlverhalten sind. Eine entsprechende Korrektur des Programms wurde vorgenommen.

S. A. Abramow behandelte andererseits die Summation rationaler Funktionen schon im Jahre 1971 (s. [A71]). Er befaßte sich auch in weiteren Arbeiten (s. [A74, A75, A89]) mit diesem Problem. Seine Überlegungen und die damit verbundenen Verfahren haben aber lange Zeit keine angemessene Beachtung gefunden, auch weil sie in russischer Sprache erschienen sind. Es stellt sich aber heraus, daß durch eine leichte Erweiterung das Verfahren von Abramow sich besonders in Hinblick auf einige Eigenschaften der gesuchten Zerlegung von Vorteil zeigt. Deswegen wurde eine Implementierung sowohl im System Maple als auch in Axiom realisiert.

Schließlich lieferte P. Paule im Jahre 1992 (s. [Pa92]) eine umfassende theoretische Behandlung des Problems, die für unsere Betrachtungen als Grundlage verwendet wird. Wichtige Aussagen über die Existenz und die Struktur der Lösungen werden getroffen. Er schlägt auch ein weiteres Verfahren zur Summation rationaler Funktionen vor, die auf einer Analogie zur Horowitz-Integration rationaler Funktionen basiert.

Mit Hilfe des von Paule geschaffenen Rahmens beschreiben wir die erwähnten Algorithmen durch eine einheitliche Darstellung. Wir werden somit insbesondere auf die Unterschiede und Ähnlichkeiten der verschiedenen Verfahren hinweisen.

Die Arbeit ist in sieben Kapitel untergliedert. In dem ersten Kapitel werden grundlegende Aspekte des Problems behandelt. Eine angemessene Notation wird eingeführt, um das Problem der indefiniten Summation zu definieren. Nachdem die Summation von Polynomen erläutert wird, führen wir die wichtigsten Begriffe ein, mit deren Hilfe dann Aussagen über das Problem gemacht werden. Der größte Teil dieser Begriffe stammt aus der Arbeit von P. Paule. Wir verwenden eine graphische Darstellung, um diese Objekte und die Aussagen zu veranschaulichen. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden diese Begriffe dazu verwendet, um die Struktur der Lösungen der indefiniten Summation zu beschreiben.

Im zweiten Kapitel wird dann der erste Algorithmus von S. A. Abramow vorgestellt. Dieses Verfahren führt das Problem auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit polynomialen Einträgen zurück und bestimmt nur eine rationale Lösung, wenn eine solche existiert. Die Aufstellung und Lösung eines Gleichungssystems ist auch der zentrale Punkt des Algorithmus von Gosper, der im Kapitel Drei beschrieben wird.

Das vierte Kapitel beschreibt den zweiten Algorithmus von S. A. Abramow, welcher iterativ vorgeht und auch eine weitere Zerlegung liefert, wenn keine rationale Summation existiert. Wir erweitern diesen Algorithmus durch eine einfache Beobachtung, die das Ergebnis in gewissem Sinne positiv beeinflußt. Ein weiterer Algorithmus, der eine allgemeine Zerlegung der rationalen Funktion liefert, ist der Algorithmus von Moenck. Dieser wird im fünften Kapitel vorgestellt. Die Ursache für die von P. Paule entdeckten Fehler wird erläutert und eine Verbesserung vorgeschlagen. Das letzte Verfahren in dieser Arbeit ist das von P. Paule. Paule beschreibt eigentlich zwei Methoden, die eine geht iterativ vor, die andere basiert auf der Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Im letzten Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften und Besonderheiten der beschriebenen Algorithmen wiederholt und, soweit möglich, verglichen.

Chapter 1

Theoretische Grundlagen

Bevor in den nächsten Kapiteln die Verfahren zur Lösung des Problems der indefiniten Summation vorgestellt werden können, werden hier grundlegende theoretische Aspekte besprochen. Eine einheitliche Notation zur genauen Beschreibung der verschiedenen Algorithmen wird eingeführt.

Außerdem werden Aussagen über die Existenz und die Struktur einer Lösung in Abhängigkeit von der aufzusummierenden rationalen Funktion gemacht.

1.1 Die Operator-Notation

Zur Darstellung und Lösung der in der Einleitung vorgestellten Aufgabe vereinbaren wir zuerst eine Reihe von Bezeichnungen. In den folgenden Betrachtungen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen (nichtnegativen) Zahlen, mit $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen und mit $\mathbb{Q}$ die der rationalen Zahlen. Mit $\mathcal{K}$ bezeichnen wir einen Körper der Charakteristik Null. Für einen Buchstaben x sind dann $\mathcal{K}[x]$, bzw. $\mathcal{K}(x)$, der Ring der Polynome, bzw. der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus $\mathcal{K}$ in x. Ferner sollen für $\mathcal{K}$ Algorithmen bekannt sein, um die Körperoperationen durchzuführen und alle ganzzahligen Nullstellen eines beliebigen Polynoms aus $\mathcal{K}[x]$ zu bestimmen.

Den Koeffizienten von x^n im Polynom $p(x) \in \mathcal{K}[x]$ bezeichnen wir mit $\langle x^n \rangle p(x)$ und den Grad von $p(x)$ mit $deg\, p(x)$.

Falls es unzweideutig ist, aus welchem Polynomring $p(x)$ stammt, schreiben wir auch einfach p dafür. Analog für rationale Funktionen aus $\mathcal{K}(x)$.

Da Verfahren für die Körperoperationen zur Verfügung stehen, sind auch Algorithmen bekannt, um den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynome zu bestimmen. Wir werden annehmen, daß $gcd(p, q)$ den größten gemeinsamen Teiler der Polynome p und q aus $\mathcal{K}[x]$ als normiertes Polynom liefert. Für das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Polynome schreiben wir $lcm(p,q)$.

Ferner kann für zwei Polynome $p,\ q \in \mathcal{K}[x]$ die Resultante beider Polynome berechnet werden. $Res(p,q)$ soll dann den Wert der **Resultante** beider Polynome liefern. Wir schreiben auch $Res(p,q;x)$, falls die Variable aus dem Zusammenhang nicht offensichtlich hervorgeht.

Für drei Polynome $p,q,v \in \mathcal{K}[x]$ sagen wir, daß v der **Anteil von** p **in** q ist, falls $p = p_1^{i_1} \ldots p_n^{i_n}$ die Zerlegung in irreduziblen Faktoren von p ist und $q = v \cdot w$ für ein $w \in \mathcal{K}[x]$. Dabei soll gelten: $v = p_1^{j_1} \ldots p_n^{j_n}$ und $gcd(p,w) = 1$.

Die Bestimmung des Anteils erfolgt durch iterierte gcd-Berechnungen. Man setze $v_1 = gcd(p,q)$ und $q_1 = q/v_1$. Wenn $v_1 = 1$ gilt, dann sind p und q teilerfremd und der Anteil von p in q ist gleich Eins. Wenn aber $v_1 \neq q$, dann bestimmt man iterativ $v_i = gcd(p, q_{i-1})$ und $q_i = q_{i-1}/v_i$ für alle $i = 2,3,\ldots$ so lange, bis für ein $i = n$ gilt $v_n = 1$. Dann sind alle auftretenden Primteiler aus p von q isoliert worden und wir können den Anteil von p in q angeben durch

$$part(p,q) = v_1 v_2 \cdots v_n$$

Wenn wir von einem irreduziblen Polynom p aus $\mathcal{K}[x]$ sprechen, dann meinen wir irreduzibel über $\mathcal{K}$.

Für eine rationale Funktion $r \in \mathcal{K}(x)$ sagen wir, daß

$$r = \frac{p}{q}$$

eine **reduzierte Darstellung** von r ist, falls p und q zwei teilerfremde Polynome aus $\mathcal{K}[x]$ sind.

Es sollen jetzt einige Operatoren auf Polynomen und rationalen Funktionen definiert werden, welche wir in der Darstellung des zu lösenden Problems verwenden.

Sei E_x der **Shift-Operator** auf $\mathcal{K}[x]$, also gelte

$$E_x : \mathcal{K}[x] \longrightarrow \mathcal{K}[x] \ : \ p(x) \longmapsto p(x+1)$$

Falls wiederum unzweideutig ist, nach welcher Variablen versetzt wird, schreiben wir nur E. Dementsprechend wird für alle $k \in \mathbb{Z}$ der Operator E_x^k definiert durch $E_x^k p(x) = p(x+k)$ für alle $p \in \mathcal{K}[x]$. Mit E_x bezeichnen wir ebenso die Erweiterung des Shift-Operators auf $\mathcal{K}(x)$.

Wenn wir mit $\mathbf{1}$ den identischen Operator (d.h. $\mathbf{1} := E_x^0$) bezeichnen, dann nennen wir

$$\Delta_x := E_x - \mathbf{1}$$

den **(Vorwärts-) Differenzenoperator** Δ_x. Es gilt also $\Delta_x f(x) = f(x+1) - f(x)$. Dazu noch der **(Rückwärts-) Differenzenoperator** ∇_x

$$\nabla_x := \mathbf{1} - E_x^{-1}$$

Falls x eindeutig aus dem Zusammenhang zu entnehmen ist, schreiben wir auch Δ, bzw. ∇ für Δ_x, bzw. ∇_x.

In Anlehnung an die *falling factorials*, im Deutsch auch „absteigende Faktorielle" genannt, die durch $(a)^{\underline{k}} := a(a-1)\cdots(a-k+1)$ für eine Konstante a definiert werden, führen wir die **falling factorials** für Polynome (und damit auch für rationale Funktionen) ein durch

$$[p]^{\underline{k}} := p\,(E^{-1}p)\cdots(E^{-k+1}p)$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und k positiv, sonst für k negativ

$$[p]^{\underline{k}} := ((Ep)\,(E^2p)\cdots(E^kp))^{-1}$$

und $[p]^{\underline{0}} := 1$. Für diese Notation siehe Graham et al. ([GKP]).

Im folgenden Lemma werden die wichtigsten Eigenschaften des oben eingeführten Differenzenoperators Δ erläutert.

Lemma 1.1 *Für f und g aus $\mathcal{K}[x]$ und $k > 0$ gilt:*

1. *Der Operator Δ ist linear.*
2. $\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + Eg\Delta f$.
3. $\Delta\dfrac{f}{g} = -\dfrac{f\Delta g + g\Delta f}{g\,Eg}$
4. $\Delta[f]^{\underline{k}} = [f]^{\underline{k-1}}\,(Ef - E^{-k+1}f)$.
5. $\Delta[f]^{\underline{-k}} = -\dfrac{E^{k+1}f - Ef}{[E^{k+1}f]^{\underline{k+1}}}$

Beweis: Der Beweis ist elementar. □

Mit Hilfe der eingeführten Notation können wir das Problem der indefiniten Summation, die wir behandeln möchten, im nächsten Abschnitt genauer beschreiben.

1.2 Indefinite und definite Summation

Die wichtigste Aufgabe der unten beschriebenen Verfahren ist die Lösung des Problems der **indefiniten Summation**, das folgendermaßen formuliert wird.

Problem 1.1 (IRS) *Gegeben sei eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$. Bestimme, falls es existiert, ein $g \in \mathcal{K}(x)$ so, daß gilt*

$$\Delta\, g = f \tag{1.1}$$

Wir werden uns hauptsächlich mit der Lösung der Differenzengleichung (1.1) beschäftigen.

An dieser Stelle wird auch der Zusammenhang mit der Differential- und Integralrechnung deutlich, bei welchen der bekannte Satz gilt:

$$\frac{d}{dx}t(x) = r(x) \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \int r(x)\,dx = t(x) + C$$

für eine Konstante C. Bei der Lösung des Problems des unbestimmten Integrals bestimmt man also unter gewissen Bedingungen diejenigen Funktionen t, für die gilt : $\frac{d}{dx}t(x) = r(x)$. In Anlehnung an diese Notation schreiben wir für die Menge aller Lösungen vom Problem (IRS)

$$\sum f(x)\,\delta x := \{g\,;\, f = \Delta\, g\}$$

In der Integralrechnung ist die Eindeutigkeit der Funktion g bis auf eine additive Konstante gewährleistet. In der Differenzenrechnung unterscheiden sich die Lösungen i. allg. um eine Funktion der Periode Eins. Wenn nämlich $s(x+1) = s(x)$ für alle x gilt, dann auch $\Delta\, s = 0$. Da wir uns auf rationale Funktionen beschränken, heißt das aber wieder, daß sich die Lösungen nur um eine Konstante unterscheiden können. Wir werden im folgenden mit einem gewissen Sprachmißbrauch $g = \Delta^{-1} f$ für $g \in \sum f(x)\,\delta x$ schreiben.

Ebenso wie der Begriff des unbestimmten Integrals in der indefiniten Summation sein diskretes Analogon findet, wird auch das bestimmte Integral auf die definite Summation übertragen. So wie

$$\int_a^b r(x)\,dx = t(x)|_a^b = t(b) - t(a)$$

wird die **definite Summe** definiert als

$$\sum_a^b f(x)\,\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Aus der Lösung g des Problems (IRS) kann man direkt jede definite Summe zum gleichen Summanden berechnen, denn es gilt

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1}(g(k+1) - g(k)) = \sum_{k=a}^{b-1} g(k+1) - \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = g(b) - g(a)$$

Wichtig ist dabei natürlich, daß die Funktionswerte $f(k)$ für $k = a, \ldots, b-1$ definiert sein müssen. Das bedeutet, daß das Nenner-Polynom q von f keine ganzzahligen Nullstellen im Intervall haben soll, über das f aufsummiert wird. Wir werden im unten angegebenen Beispiel auf diesen Aspekt hinweisen.

Beispiel: Wir wollen, falls möglich, für die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

einen rationalen Ausdruck in der Variablen n berechnen.

Diese Aufgabe kann mit einer rationalen Funktion $g \in \mathbb{Q}(x)$ gelöst werden, für die

$$\Delta\, g = \frac{1}{x(x+1)}$$

gilt. Offenbar ist $g = -1/x$ eine Lösung für dieses Problem, und somit können wir schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1} = \frac{n}{n+1}$$

Die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Verfahren entscheiden, ob eine rationale Lösung der im Problem (IRS) beschriebenen Differenzengleichung für eine angegebene rationale Funktion $f \in \mathcal{K}\,(x)$ existiert, und bestimmen eine solche, falls möglich.

Das Nenner-Polynom von f besitzt die Nullstellen $\{0, -1\}$. Wie oben gesagt wurde, muß man sicherstellen, daß keine ganzzahlige Nullstelle im Summationsintervall auftritt. In unserem Beispiel ist dies der Fall, da über positive Werte von k aufsummiert wird. Es wäre andererseits sinnlos, aus der Lösung g des Problems (IRS) beispielsweise folgende Beziehung für $n > 0$ aufzustellen

$$\sum_{k=-3}^{n} f(k) = g(n+1) - g(-3) = -\frac{n+4}{3(n+1)}$$

Für den Spezialfall, daß f Polynom ist, sind schon lange effiziente Verfahren bekannt, die das Problem der indefiniten Summation lösen. In diesem Falle existiert immer ein Polynom g, für das gilt $\Delta g = f$. Deswegen wird der Fall der Polynome im nächsten Abschnitt gesondert behandelt. Dank der Linearität des Differenzenoperators Δ kann man sich dann auf die rationalen Funktionen mit reduzierter Darstellung $f = p/q$ beschränken, für die $deg\, p < deg\, q$ gilt.

1.3 Summation von Polynomen

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die für ein beliebiges Polynom

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i x^i \quad \in \mathcal{K}[x] \tag{1.2}$$

ein Polynom $g \in \mathcal{K}[x]$ bestimmt, das Lösung der Gleichung $\Delta g = f$ ist. Bei der entsprechenden Aufgabe in der Differentialrechnung verwendet man die Beziehung

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

um mit Hilfe der Linearität des Differentialoperators das unbestimmte Integral zu berechnen durch

$$\int f \, dx = \sum_{i=0}^{d} \frac{f_i}{i+1} x^{i+1} + C$$

für ein $C \in \mathcal{K}$. In der Differenzenrechnung kann eine ähnliche Beziehung für die Basis der Monome über x nicht aufgestellt werden, denn es gilt für $n \geq 0$

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k$$

Wenn man aber die Basis der falling factorials betrachtet, dann bemerkt man, daß folgende Beziehung für $n > 0$ gilt.

$$\Delta [x]^{\underline{n}} = n [x]^{\underline{n-1}}$$

Somit kann man die indefinite Summation eines Polynoms f gegeben durch

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i \, [x]^{\underline{i}} \quad \in \mathcal{K}[x]$$

berechnen durch

$$\Delta^{-1} f = \sum_{i=0}^{d} \frac{f_i}{i+1} [x]^{\underline{i+1}}$$

Wir stellen hier ein Verfahren vor, welches eine spezielle Klasse von Polynomen, die sogenannten Bernoulli-Polynome, verwendet, um die indefinite Summation von Polynomen durchzuführen (s. [Ge, KePe]). Diese Methode ist beispielsweise auch im Computer-Algebra System Maple für die Bestimmung der indefiniten Summation von Polynomen implementiert.

Definition 1.1 *Die* **Bernoulli-Polynome** $\{B_0(x), B_1(x), \ldots\}$ *werden definiert durch*

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{1.3}$$

Die Angabe der Bernoulli-Polynome durch ihre erzeugende Funktion liefert uns auch eine Berechnungsvorschrift für sie. Man betrachte folgende Gleichung, die aus (1.3) durch Multiplizieren beider Seiten mit $(e^t - 1)/t$ berechnet wird:

$$e^{tx} = \frac{e^t - 1}{t} \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{1.4}$$

Für die rechte Seite von (1.4) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{e^t - 1}{t} \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{i \geq 0} \frac{t^i}{(i+1)!} \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{B_i(x)}{(n-i+1)} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich in der Entwicklung nach t in (1.4) erhält man somit

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{B_i(x)}{n-i+1} \tag{1.5}$$

für alle $n \geq 0$. Diese Regel ergibt für die ersten Werte von n

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{aligned} \tag{1.6}$$

Das für unsere Zwecke wichtige Verhalten der Bernoulli-Polynome bzgl. Δ_x wird im folgenden Lemma beschrieben.

Lemma 1.2 *Für die Bernoulli-Polynome* $\{B_0(x), B_1(x), \ldots\}$ *gilt*

$$\Delta_x B_k(x) = kx^{k-1} \qquad (k \geq 0) \tag{1.7}$$

Beweis: Man betrachte die Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{\Delta_x B_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x+1)}{n!}t^n - \sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n \\ &= \frac{t}{e^t-1}\left(e^{(x+1)t}-e^{tx}\right) \\ &= te^{tx} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}t^n\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus dem direkten Koeffizientenvergleich. □

Aus diesem Lemma wird folgendes Korollar abgeleitet, das die Lösung des Problems beinhaltet.

Korollar 1.1 *Für alle $k \geq 0$ gilt*

$$\frac{1}{k+1}B_{k+1}(x) = \Delta^{-1}\, x^k$$

Beispiel: Wir berechnen die indefinite Summe $g(x)$ eines Polynoms aus $\mathbb{Q}(a)(x)$

$$\Delta^{-1}(x^2 - \frac{a+1}{3}x + 3) = g(x)$$

Mit den Polynomen aus (1.6) und dem Korollar 1.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{3}B_3(x) - \frac{a+1}{3\cdot 2}B_2(x) + 3B_1(x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - (\frac{2}{3}+\frac{1}{6}a)x^2 + (\frac{10}{3}+\frac{1}{6}a)x - \frac{55}{36}\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $\Delta g(x) = x^2 - (a+1)x/3 + 3$.

Bemerkung 1.1 *Die bekannten* **Bernoulli-Zahlen** $\{B_0, B_1, \ldots\}$, *die definiert werden durch*

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0} B_n\frac{t^n}{n!} \tag{1.8}$$

erfüllen offensichtlich die Beziehung

$$B_n = B_n(0) \qquad (n \geq 0) \tag{1.9}$$

Da die indefinite Summe für Polynome nach dem oben vorgestellten Verfahren bestimmt werden kann, werden wir in den folgenden Abschnitten und Kapiteln annehmen, daß die betrachteten rationalen Funktionen nicht als Polynom darstellbar sind. Ferner soll der Zähler der rationalen Funktion einen niedrigeren Grad als der Nenner haben. Wegen der Linearität des Differenzenoperators ist dies keine Einschränkung.

In den folgenden Abschnitten werden Begriffe eingeführt, die zur formalen Beschreibung der Lösungsverfahren sehr nützlich sind. Im nächsten Abschnitt wird der Begriff der Dispersion eines Polynoms definiert, der in jedem der unten beschriebenen Algorithmen eine wesentliche Rolle spielt.

1.4 Die Dispersion

In diesem Abschnitt wird die Dispersion einer rationalen Funktion eingeführt. Der Begriff stammt in dieser Form aus den Arbeiten von Abramow (s. [A71]) und ist für unsere Aufgabe eine sehr wichtige Statistik für Polynome. Mit Hilfe der Dispersion wird ein Kriterium über die Nicht-Existenz einer Lösung der indefiniten Summation vorgestellt.

Definition 1.2 *Sei $p \in \mathcal{K}[x]$ mit $deg\, p > 0$. Die* **Dispersion** *des Polynoms p (i.Z. $dis\ p$) wird definiert durch*

$$dis\ p := \max\{h\,;\ h \in \mathbb{N} \wedge gcd(p, E^h p) \neq 1\}$$

Für eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ mit der reduzierten Darstellung

$$f = \frac{f_1}{f_2},$$

wobei $deg\, f_2 > 0$, wird die Dispersion definiert durch

$$dis\ f := dis\ f_2.$$

Aus der Definition ist ersichtlich, daß die Dispersion immer nichtnegative ganzzahlige Werte annimmt. Man bemerke, daß der Wert von $dis\ \ p$ sich nicht ändert, wenn wir p als Polynom über einer beliebigen Erweiterung $\mathcal{L}$ des Koeffizientenkörpers $\mathcal{K}$ betrachten. Wenn $gcd(p, E^k p) = 1$ in $\mathcal{K}[x]$ gilt, dann auch in $\mathcal{L}[x]$.

Bemerkung 1.2 *Es ist leicht einzusehen, daß gilt*

$$dis\ p = \max\{\alpha - \beta\,;\ p(\alpha) = p(\beta) = 0 \wedge \alpha - \beta \in \mathbb{Z}\}.$$

Der Wert dis p kann also auch als die größte ganzzahlige Distanz zwischen den Nullstellen des Polynoms p angesehen werden.

Bei der obigen Bemerkung ist zu beachten, daß alle Nullstellen α und β des Polynoms berücksichtigt werden. Wesentlich ist also nur der gegenseitige Abstand der Nullstellen in dem Zerfällungskörper von p. Andererseits werden wir unten sehen, daß es für die Berechnung der Dispersion nicht nötig ist, eine explizite Zerlegung im Zerfällungskörper zu kennen.

Beispiel: Für $p = (x^3 + 5x^2 + 6)$ gilt $dis\ p = 3$, denn p besitzt die Zerlegung $p = x(x+2)(x+3)$ und somit die Nullstellen $\{0, -2, -3\}$. Es gilt ferner $dis\ x^2 = 0$ und $dis\ (x/(x^2 + x)) = 1$.

Betrachten wir das Polynom $p = x^6 + x^4 + 4x^2 + 4$ aus $\mathbb{Q}[x]$. Die vollständige Faktorisierung in $\mathbb{Q}[x]$ ist $p = (x^2+1)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. In $\mathbb{C}[x]$ zerfällt das Polynom in

$$p = (x+i+1)(x+i)(x+i-1)(x-i+1)(x-i)(x-i-1)$$

und daraus sieht man mit der obigen Bemerkung, daß $dis\ p = 2$.

Das Verhalten der Statistik dis in bezug auf den Differenzenoperator ist von besonderem Interesse und wird im folgenden Satz erläutert.

Satz 1.1 *Sei g eine rationale Funktion aus* $\mathcal{K}(x)$ *mit der reduzierten Darstellung*

$$g = \frac{g_1}{g_2}$$

und $deg\, g_2 > 0$*, dann gilt*

$$dis\ \Delta\, g = 1 + dis\ g$$

Beweis: Sei $k = dis\ g$. Man betrachte die rationale Funktion

$$\Delta\, g = \frac{g_2 E g_1 - g_1 E g_2}{g_2 E g_2} \tag{1.10}$$

Falls $k = 0$, dann sind die Polynome g_2 und Eg_2 zueinander teilerfremd und somit ist die rechte Seite von (1.10) schon eine reduzierte Darstellung für die linke Seite. Es gilt dann $dis\ \Delta\, g = 1$.

Falls $k > 0$, dann existiert ein irreduzibles Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$, für das $pE^k p \,|\, g_2$ gilt. Wir zeigen, daß $pE^{k+1}p$ den Nenner von Δg teilt. Nehmen wir an, es gelte $p \,|\, (g_2 E g_1 - g_1 E g_2)$. Da $p \,|\, g_2$, würde das $p \,|\, E g_2$ nach sich ziehen und somit auch $E^{-1}p \,|\, g_2$ und $E^{-1}pE^k p \,|\, g_2$. Dann wäre $dis\ g_2 > k$, ein Widerspruch zu $k = dis\ g$. Wenn wir annehmen, daß $E^{k+1}p \,|\, (g_2 E g_1 - g_1 E g_2)$ gilt, können wir ähnlich argumentieren. Wir hätten $E^{k+1}p \,|\, g_2$ und wieder $dis\ g_2 > k$. Es gilt also $gcd\,(pE^{k+1}p, g_2 E g_1 - g_1 E g_2) = 1$ und natürlich $pE^{k+1}p \,|\, g_2 E g_2$.

Damit ist gezeigt, daß $dis\ \Delta g \geq dis\ g + 1$. Es ist aber offensichtlich, daß $dis\ \Delta g \leq dis\ g + 1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Die Aussage des Satzes liefert ein Kriterium über die Nicht-Existenz einer Lösung für das Problem (IRS) . Dies wird durch folgendes Korollar ausgedrückt.

Korollar 1.2 *Sei $f \in \mathcal{K}(x)$. Wenn eine Lösung des Summationsproblems (IRS) für f existiert, dann gilt*

$$dis\ f(x) \geq 1$$

Damit wissen wir also, daß es keine rationale Funktion g als Lösung vom Problem (IRS) gibt, falls die Dispersion von f Null ist. Mit Hilfe des unten beschriebenen Begriffs der Greatest-Factorial Factorization werden wir später ein schärferes Kriterium angeben, das dieses erweitert.

Beispiel: In vielen Bereichen, z.B. bei der Komplexitätsabschätzung von Algorithmen, tritt eine spezielle Zahlenfolge auf. Die Folge der **harmonischen Zahlen** H_n wird definiert durch

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Das oben vorgestellte Kriterium gewährleistet, daß H_n nicht als rationale Funktion in n darstellbar ist, da $dis\ 1/i = 0$. Dasselbe gilt für die sogenannten **erweiterten harmonischen Zahlen**

$$H_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k}$$

Die Bedeutung der Statistik dis wird sich auch bei der Implementierung der beschriebenen Algorithmen zeigen, denn dieser Wert muß in jedem Fall berechnet werden. Im nächsten Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, um die Dispersion zu berechnen.

1.4.1 Berechnung der Dispersion

Für beliebige Polynome $p \in \mathcal{K}[x]$ ist es möglich, den Wert von $dis\ p$ zu berechnen, ohne p zu zerfällen.

Man betrachte zu dem Polynom $p(x) \in \mathcal{K}[x]$ das Polynom $p_h(x) = p(x+h)$ als Element von $\mathcal{K}(h)[x]$, wobei h ein von x verschiedenes Symbol ist. Betrachtet man jetzt $p(x)$ auch als Element von $\mathcal{K}(h)[x]$, so gilt bekanntlich

$$Res(p, p_h; x) = 0 \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad gcd(p, p_h) \neq 1$$

Sei $r(h) = Res(p, p_h; x) \in \mathcal{K}[h]$. Die Dispersion von p ist dann die größte ganzzahlige Nullstelle des Polynoms $r(h)$. Wegen der im ersten Abschnitt geforderte Eigenschaft von $\mathcal{K}$ steht also ein Algorithmus zur Berechnung von $dis\ (p)$ durch diese Methode zur Verfügung.

Obwohl diese Methode eine effektive Möglichkeit liefert, die Dispersion zu berechnen, erweist sich die Berechnung mit Resultanten als sehr zeitaufwendig. Computer-Algebra Systeme wie Maple oder Axiom bieten Funktionen an, die das angegebene Polynom in irreduzible Teiler faktorisieren. Experimentelle Beobachtungen haben gezeigt, daß diese Funktionen für unsere Zwecke von Vorteil sind, denn wenn wir die Faktorisierung $p_1^{i_1} \cdots p_n^{i_n}$ des Polynoms p mit voneinander verschiedenen irreduziblen Faktoren $p_1, \ldots, p_n$ zur Verfügung haben, dann kann die Berechnung der Dispersion ohne Verwendung von Resultanten erfolgen. Sei $k = dis\ p$, dann existieren $l, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ für die gilt $p_l = E^k p_j$. Da der Shift-Operator irreduzible Polynome auf irreduzible Polynome abbildet, reicht es, gleichgradige Teiler p_j und p_l zu vergleichen.

Für ein Polynom $p(x) \in \mathcal{K}[x]$ der Form

$$p(x) = \sum_{h=0}^{d} a_h x^h$$

gilt für das versetzte Polynom $E^k p$

$$\begin{aligned} E^k p(x) = p(x+k) &= \sum_{h=0}^{d} a_h (x+k)^h \\ &= \sum_{h=0}^{d} a_h \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} k^{h-i} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \sum_{h=i}^{d} a_h \binom{h}{i} k^{h-i} x^i \end{aligned}$$

und somit

$$\langle x^d \rangle E^k p(x) = a_d \qquad \text{und} \qquad \langle x^{d-1} \rangle E^k p(x) = a_{d-1} + k d a_d$$

Bei der Überprüfung, ob $E^k p = q$ für ein Polynom

$$q(x) = \sum_{h=0}^{d} b_h x^h$$

gilt, reicht es, nur diejenigen ganzzahligen k zu untersuchen, welche die Gleichung

$$kda_d + a_{d-1} = b_{d-1}$$

erfüllen.

Die Berechnung erfolgt durch folgenden Algorithmus

Algorithmus 1.1 *(Zur Berechnung der Dispersion eines Polynoms)*

Input: *Polynom* $p \in \mathcal{K}[x]$ *mit* $deg\, p > 0$
Output: $dis\, p$
Berechne die Faktorisierung von $p = p_1^{i_1} \cdots p_n^{i_n}$ *in irreduzible Teiler*
Setze $k \leftarrow 0$
Wiederhole für alle p_i *in* $\{p_1, \ldots, p_n\}$
Wiederhole für alle p_j *in* $\{p_{i+1}, \ldots, p_n\}$ *mit* $deg\, p_j = d = deg\, p_i$
Falls $k_{neu} = \frac{\langle x^{d-1}\rangle p_j - \langle x^{d-1}\rangle p_i}{d\langle x^d\rangle p_i}$ *ganzzahlig ist*
und $E^{k_{neu}} p_i = p_j$,
dann setze $k \leftarrow \max\{k_{neu}, k\}$
Gib k *als Ergebnis zurück*

1.5 Die Shift-Struktur rationaler Funktionen

Nach der Einführung der Dispersion wird die Struktur einer rationalen Funktion untersucht.

Die Begriffe und Ideen, die in folgenden Abschnitten beschrieben werden, stammen im wesentlichen aus Arbeiten von Paule (s. [Pa92]).

Sei $Fac(p)$ die Menge der normierten irreduziblen Teiler des Polynoms $p \in \mathcal{K}[x]$, also

$$Fac(p) = \{q \in \mathcal{K}[x]\,;\, q \mid p \text{ mit } q \text{ normiert und irreduzibel}\}$$

Wir sagen, daß zwei Polynome $p, q \in \mathcal{K}[x]$ **shift-äquivalent** sind, i.Z. $p \sim q$, falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, für das $E^k p = q$. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{K}[x]$ und auf $Fac(p)$ für $p \in \mathcal{K}[x]$.

Auf jeder Äquivalenzklasse von $Fac(p)$ führen wir eine totale Ordnung ein. Seien also $p, q \in \mathcal{K}[x]$ shift-äquivalent, so definieren wir die Relation $<$ durch

$$p < q :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : k > 0 \,\text{und}\, E^k p = q$$

Mit Hilfe dieser Ordnung definieren wir ein eindeutiges Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen nach $\sim$. Als Repräsentant jeder Klasse nehmen wir das kleinste Polynom nach $<$ aus dieser Klasse. Dieses Repräsentantensystem bezeichnen wir mit $ShiftRep(p)$.

Beispiel: Für das Polynom

$$p(x) = x(x - \frac{1}{5})(x^3 + x + 1)^2(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)(x - 1)^2(x - 3) \in \mathbb{Q}[x]$$

zerfällt $Fac(p)$ in drei Äquivalenzklassen

$$\{x - \frac{1}{5}\}, \{x^3 - 3x^2 + 4x - 1, x^3 + x + 1\}, \{x, x - 1, x - 3\}$$

und wir haben

$$ShiftRep(p) = \{x - \frac{1}{5}, x^3 - 3x^2 + 4x - 1, x - 3\}$$

und es gilt $x - 3 < x - 1$.

Sei für $p \in \mathcal{K}[x]$ das somit eindeutig bestimmte Repräsentantensystem $ShiftRep(p) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und q_i das größte Element der Äquivalenzklasse von p_i. Dann existiert ein $k_i \in \mathbb{N}$ so, daß $E^{k_i} p_i = q_i$. Für alle $i = 1, \ldots, n$ definieren wir die **Länge der Äquivalenzklasse** von p_i als $l_p(p_i) = k_i + 1$. Jedes Element einer Klasse tritt als Teiler von p mit einer gewissen Vielfachheit auf. Die größte dieser Multiplizitäten über alle Elemente der Klasse von p_i bezeichnen wir mit $mult_p(p_i)$.

Bemerkung 1.3 *Es gilt*

$$dis\ p = \max_{1 \leq i \leq n} \{l(p_i)\} - 1$$

1.5.1 Graphische Darstellung

Zur Veranschaulichung der im letzten Abschnitt eingeführten Begriffe schlagen wir eine graphische Darstellung vor. Dadurch wird es möglich, die späteren Lösungsverfahren anschaulich zu erläutern.

Sei $ShiftRep(p) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ das Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von $Fac(p)$ nach der Relation $\sim$ für $p \in \mathcal{K}[x]$. Dazu definieren wir eine Menge $ShiftGraph(p)$ von Punkten aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$ShiftGraph(p) = \{(j,i)\,;\, 1 \le i \le n,\, j \ge 0,\, E^j p_i \,|\, p\} \subset \mathbb{N}^2$$

Wir stellen $ShiftGraph(p)$ graphisch als Teilgitter dar. Eine Beschriftung der Punkte mit ganzen Zahlen $m_p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wird definiert durch $m_p(i,j) =$ Vielfachheit von $E^j p_i$ als Teiler von p oder Null für $i > n$. Man beachte, daß die Definition von $ShiftGraph(p)$ von der Numerierung der Repräsentanten in $ShiftRep(p)$ abhängt. Die Darstellung ist aber bis auf Vertauschungen der Zeilen eindeutig.

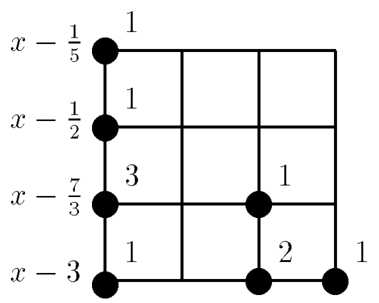
Beispiel: Für das Polynom

$$p(x) = x(x - \frac{1}{5})(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})(x - \frac{7}{3})^3(x-1)^2(x-3) \in \mathbb{Q}[x]$$

mit

$$ShiftRep(p) = \{x - \frac{1}{5}, x - \frac{1}{2}, x - \frac{7}{3}, x - 3\}$$

wird $ShiftGraph(p)$ wie in folgender Abbildung dargestellt.



Aus der Abbildung kann man sofort ablesen, daß $l(p_i)$ in diesem Beispiel als maximalen Wert 4 annimmt. Daher gilt $dis\ p = 3$.

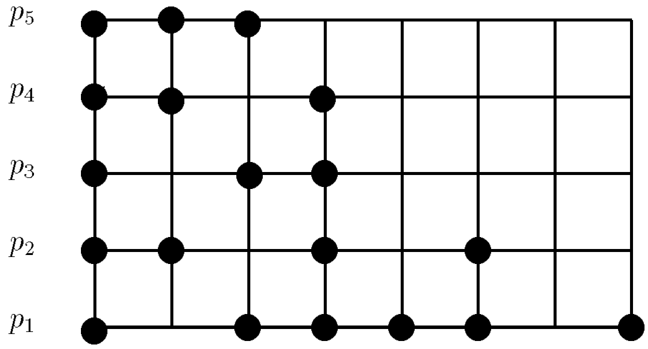
In den nächsten Abschnitten werden weitere Begriffe zur Erfassung der Shift-Struktur einer rationalen Funktion vorgestellt. Wir werden die Definitionen mit Hilfe dieser graphischen Darstellung veranschaulichen.

1.6 Der Greatest-Factorial Exponent (GFE)

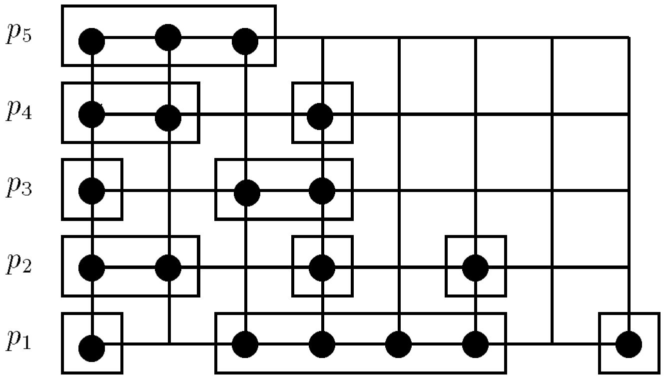
Betrachten wir zu einem gegebenen Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$ die oben definierten Mengen $ShiftRep(p) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und $ShiftGraph(p)$. Wir untersuchen jetzt **Shift-Folgen** in $ShiftGraph(p)$, d. h. Folgen der Form

$$\{(j,i), (j+1,i), \ldots, (j+l-1,i)\} \subseteq ShiftGraph(p)$$

Sei also $p \in \mathcal{K}[x]$ ein Polynom mit $ShiftRep = \{p_1, \ldots, p_5\}$ und sei $ShiftGraph(p)$ gegeben durch folgende Abbildung (die Beschriftung der Punkte geben wir nicht an).



Wir nennen solche Shift-Folgen **maximal**, die in keiner anderen enthalten sind. Alle maximalen Shift-Folgen des Beispiels werden in folgender Abbildung dargestellt.



Der maximalen Länge solch maximaler Folgen geben wir einen besonderen Namen. Wir nennen diesen Wert **Greatest-Factorial Exponent** von p, i. Z. $GFE(p)$.

$GFE(p) = k$ bedeutet, daß ein Teiler $q \in \mathcal{K}[x]$ von p existiert, mit $deg\, q > 0$ und $[q]^{\underline{k}} \,|\, p$. k soll dabei den größtmöglichen Wert annehmen. Im obigen Beispiel ist $GFE(p) = 4$, $q = E^5 p_1$ und wir finden kein q' mit $[q']^{\underline{5}} \,|\, p$.

Man definiert $GFE(p)$ auch durch

$$GFE(p) = \begin{cases} 0 & : \; falls\, deg\,(p) = 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}\,;\, gcd\,(p, Ep, \ldots, E^k p) = 1\} & : \; sonst \end{cases}$$

Im nächsten Abschnitt benutzen wir den Begriff der Shift-Folge um eine weitere Darstellung eines Polynoms einzuführen.

1.7 Die Greatest-Factorial Factorization (GFF)

Bei der Integration rationaler Funktionen (s. [Co, SuMa]) spielt eine besondere Zerlegung von Polynomen eine wichtige Rolle: Die Squarefree-Factorization (quadratfreie Zerlegung). Sei $p \in \mathcal{K}[x]$ ein Polynom und $p = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ vollständige Zerlegung über $\mathcal{K}$. Dann definiert man q_j als Produkt aller irreduziblen Teiler p_i von p mit $e_i = j$ für alle $j \leq k := \max\{e_1, \ldots, e_n\}$. Somit ist $q_1 \cdots q_k = p$ die quadratfreie Zerlegung von p. Insbesondere sind die Polynome q_j paarweise teilerfremd und quadratfrei.

In Anlehnung an diesem Begriff führen wir in diesem Abschnitt eine Darstellung für Polynome ein, die die Information über die Shift-Struktur der Polynome beinhaltet. Diese Darstellung wird uns später ermöglichen, eine alternative Berechnung der Dispersion durch vereinfachte Resultanten anzugeben.

Definition 1.3 *Sei p ein normiertes Polynom aus $\mathcal{K}[x]$ mit $\deg p \geq 1$. Wir nennen* **Greatest-Factorial Factorization** *von p, i. Z. $GFF(p)$, eine Darstellung*

$$p = [p_1]^{\underline{1}}[p_2]^{\underline{2}} \cdots [p_k]^{\underline{k}}$$

mit den Eigenschaften

1. *$p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{K}[x]$, $\deg p_k \geq 1$ und für alle $i = 1, \ldots, k-1$ ist p_i entweder normiert mit $\deg p_i \geq 1$ oder $p_i = 1$.*

2. *Für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle h mit $\max\{i, j\} - i < h \leq j$ ist $gcd(p_i, E^{-h} p_j) = 1$.*

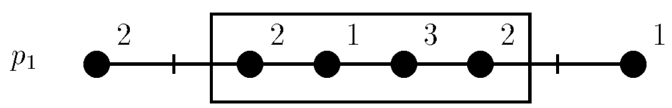
Wir werden unten sehen, daß solche eine Darstellung eindeutig ist. Der Begriff wird durch ein Beispiel erläutert. Betrachten wir ein Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$ der Form

$$p = (p_1)^2 (E^2 p_1)^2 (E^3 p_1)(E^4 p_1)^3 (E^5 p_1)^2 (E^7 p_1)$$

für ein irreduzibles Polynom $p_1 \in \mathcal{K}[x]$. Es gilt dann

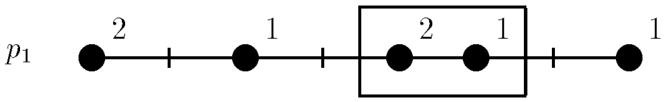
$$Fac(p) = \{p_1, E^2 p_1, E^3 p_1, E^4 p_1, E^5 p_1, E^7 p_1\}$$

und $ShiftRep(p) = \{p_1\}$. Wir stellen die einzige Shift-Äquivalenzklasse dar als



wobei die längste maximale Shift-Folge eingerahmt wurde. Es gilt $GFE(p) = 4$. Wir bestimmen das Polynom q so, daß $[q]^{\underline{4}} \,|\, p$ und q maximalen Grad hat. Es reicht, für jede Shift-Folge maximaler Länge $((j,i), \ldots (j+k,i))$ das Polynom $E^{j+k} p_i^d$ zu nehmen, wobei d die kleinste in der Folge auftretende Bewertung $m_p(j+l,i)$ ist.

In unserem Beispiel ist dann $q = E^5 p_1$. Für $p' = p/[q]^{\underline{4}}$ gilt offensichtlich $GFE(p') < GFE(p)$, da in jeder Shift-Folge maximaler Länge mindestens ein Punkt Null als neue Bewertung bekommt und somit die Länge mindestens um Eins verringert wird. Für p' erhalten wir



mit $GFE(p') = 2$. Durch Iterieren des Verfahrens bekommen wir eine Darstellung des Polynoms p als

$$p = [q_1]^{\underline{1}} [q_2]^{\underline{2}} \cdots [q_k]^{\underline{k}}$$

für $k = GFE(p)$. Diese Methode kann direkt auf Polynome übertragen werden, deren Faktorenmenge in mehreren Äquivalenzklassen zerlegt wird: Man wendet die Überlegung auf jede Shift-Folge maximaler Länge an und liefert das Produkt der dadurch bestimmten Polynome als Ergebnis zurück. Die Berechnung von q_k erfolgt durch die Beziehung

$$q_k = gcd\,(p, Ep, \ldots, E^{k-1}p)$$

Für das oben angegebene Beispiel bekommt man die Darstellung

$$p = [p_1^2 (E^2 p_1)(E^4 p_1)(E^7 p_1)]^{\underline{1}} \, [E^5 p_1]^{\underline{2}} \, [E^5 p_1]^{\underline{4}}$$

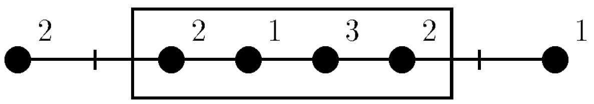
Um zu zeigen, daß die durch das Verfahren gewonnene Darstellung die Greatest-Factorial Factorization des Polynoms p ist, brauchen wir nur die Eigenschaft 2 der Definition zu überprüfen.

Aus dem Verfahren sieht man aber, daß nach der Bestimmung des Polynoms $p' = p/[p_k]^{\underline{k}}$ gilt

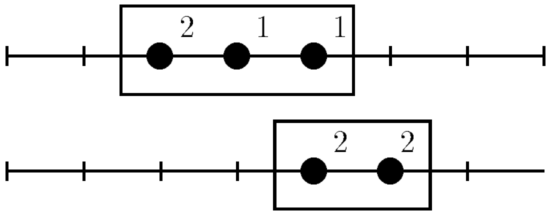
$$ShiftGraph(p') \subseteq ShiftGraph(p) \tag{1.11}$$

Insbesondere ist jede Shift-Folge maximaler Länge in p' entweder in einer Folge maximaler Länge in p enthalten oder selber eine maximale Folge in p.

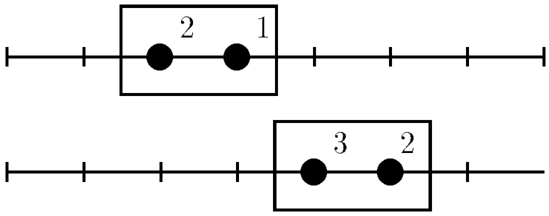
Die Aussage der Eigenschaft 2 aus der Definition ist, daß maximale Folgen in p und p' entweder ineinander enthalten, oder durch mindestens einen leeren Gitterpunkt getrennt sind. Zur Veranschaulichung stellen wir das Polynom wieder graphisch dar. Ein Widerspruch zur Aussage wäre, aus dem Polynom aus obigem Beispiel

p_1 

beispielsweise folgende faktorielle Teile



oder



zu bekommen. Die Vermeidung solcher Fälle ist durch das vorgestellte Verfahren offensichtlich gewährleistet, insbesondere durch die Beziehung (1.11) und durch die Tatsache, daß in jedem Schritt die maximale gemeinsame Vielfachheit innerhalb einer maximalen Shift-Folge abgezogen wird. Somit ist dies ein Verfahren zur Berechnung von $GFF(p)$.

Bemerkung 1.4 *Für ein Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$ sind die einzelnen faktoriellen Teile von $GFF(p)$ i. allg. nicht paarweise teilerfremd, wie wir im obigen Beispiel gesehen haben.*

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die Greatest-Factorial Factorization eines Polynoms eindeutig ist.

1.7.1 Eigenschaften der GFF

Die wichtigsten Eigenschaften, insbesondere die Eindeutigkeit, der Greatest-Factorial Factorization eines Polynoms werden im folgenden Satz angegeben.

Satz 1.2 *Sei p ein normiertes Polynom aus $\mathcal{K}[x]$ mit $deg\, p \geq 1$ und sei*

$$p = [p_1]^{\underline{1}}[p_2]^{\underline{2}} \cdots [p_k]^{\underline{k}}$$

eine GFF von p. Dann gilt:

1. *Für alle $i = 1, \ldots, k$ und $p_i \neq 1$ gilt $GFE([p_1]^{\underline{1}}[p_2]^{\underline{2}} \cdots [p_i]^{\underline{i}}) = i$.*
2. *Die GFF von p ist eindeutig, d.h. wenn $[q_1]^{\underline{1}}[q_2]^{\underline{2}} \cdots [q_n]^{\underline{n}}$ auch GFF von p ist, dann gilt $n = k$ und $p_i = q_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$.*

Beweis: Zu 1 beobachten wir zuerst, daß $GFE(p_i) = 1$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt. Dies folgt aus der Eigenschaft 2 der Definition von $GFF(p)$ mit $j = i$ und $h = 1$. Damit ist $GFE([p_i]^{\underline{i}}) = i$ für alle i und $GFE([p_1]^{\underline{1}}[p_2]^{\underline{2}} \cdots [p_i]^{\underline{i}}) \geq i$.

Angenommen, wir hätten $GFE([p_1]^{\underline{1}} \cdots [p_i]^{\underline{i}}) > i$, dann würden sich maximale Folgen aus $[p_i]^{\underline{i}}$ mit maximalen Folgen aus einem $[p_j]^{\underline{j}}$ für ein $j < i$ überlappen. Das ist aber durch die Definition der GFF nicht möglich.

Zu 2 stellen wir fest, daß nach der Aussage 1 desselben Satzes insbesondere gilt

$$GFE([p_1]^{\underline{1}}[p_2]^{\underline{2}} \cdots [p_k]^{\underline{k}}) = k \qquad \text{und} \qquad GFE([q_1]^{\underline{1}}[q_2]^{\underline{2}} \cdots [q_n]^{\underline{n}}) = n$$

also auch $k = n$.

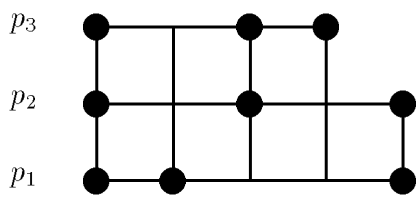
Da k maximal ist, enthält p_k jeden Teiler aus einer Shift-Folge maximaler Länge in der Shift-Struktur von p. Andererseits muß er jeden Teiler mit der höchstmöglichen gemeinsamen Vielfachheit enthalten, die in der Shift-Folge auftritt, denn sonst würde eine Shift-Folge der Länge k in $[p_1]^{\underline{1}} \cdots [p_{k-1}]^{\underline{k-1}}$ auftreten. Deshalb ist die Wahl von p_k durch die Eigenschaft 1 eindeutig. Und somit gilt $q_k = p_k$.

Analog dazu zeigt man, daß $p_{k-1} = q_{k-1}$ usw. □

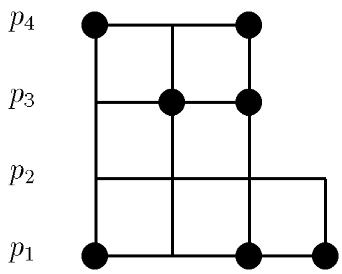
Der Begriff der *GFF* ermöglicht uns, die Berechnung der Dispersion eines Polynoms zu vereinfachen.

Betrachten wir also das allgemeinere Problem, die größte natürliche Zahl $\alpha \in \mathbb{N}$ für die Polynome $a, b \in \mathcal{K}[x]$ zu bestimmen, für die $gcd(a, E^{\alpha}b) \neq 1$ gilt. Die Zahl α ist bekanntlich die größte ganzzahlige Nullstelle des Polynoms $Res(a, E^l b; x) \in \mathcal{K}[l]$.

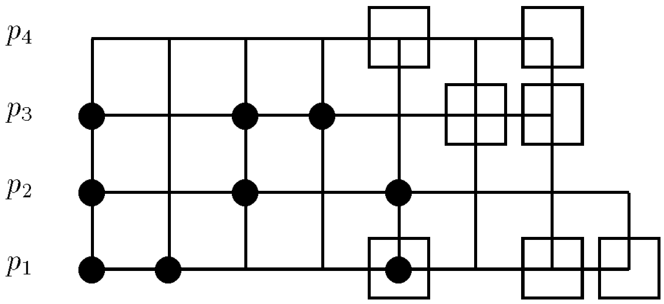
Stellen wir zuerst die Shift-Struktur von a graphisch beispielsweise wie folgt dar.



Sei ferner die Shift-Struktur von b etwa wie in folgender Abbildung. Dabei wird der Graph mit Rücksicht auf die Teiler von a gebildet, obwohl natürlich $ShiftRep(a) \neq ShiftRep(b)$ gelten kann.



Es gilt $gcd\,(a, E^{\alpha}b) \neq 1$ genau dann, wenn der Graph zu a gemeinsame Punkte mit dem um α Stellen nach rechts versetzten Graphen zu b besitzt. Wegen der Maximalität von α überschneiden sich also beide Graphen nur in der ersten bzw. letzten Spalte, wie in folgender Abbildung.



Das bedeutet, daß alle auftretenden gemeinsamen Teiler von a und $E^{\alpha}b$ rechten Endpunkten maximaler Folgen in a und linken Endpunkten maximaler Folgen in b entsprechen. Wir können uns deshalb bei der Berechnung von α durch Resultanten auf diese Endpunkte beschränken.

Dies wird im folgenden Satz erläutert.

Satz 1.3 *Für die Polynome $a, b \in \mathcal{K}\,[x]$ mit $GFF(a) = [a_1]^{\underline{1}} \cdots [a_k]^{\underline{k}}$ und $GFF(b) = [b_1]^{\underline{1}} \cdots [b_l]^{\underline{l}}$ sei α die größte nichtnegative ganze Zahl, für die gilt:*

$$Res(a, E^{\alpha}b; x) = 0$$

Dann ist α die größte nichtnegative ganze Zahl, für die gilt:

$$Res(a_1 \cdots a_k, E^{\alpha}(b_1(E^{-1}b_2) \cdots (E^{-l+1}b_l)); x) = 0$$

Beweis: Folgt direkt aus obiger Beobachtung. □

Aus diesem Satz bekommen wir für $a = b$ eine Möglichkeit, die Berechnung der Dispersion durch Resultanten deutlich zu vereinfachen.

Beispiel: Sei $a = x^3 + x^2 - 2x - 2$. Wir berechnen $\alpha = dis\ a$, also das größte ganzzahlige α so, daß

$$Res(a, E^{\alpha}a; x) = \alpha^9 - 14\alpha^7 + 49\alpha^5 - 36\alpha^3 = 0$$

Es gilt $\alpha = 3$. Nach obigem Satz, mit $a = b$, reicht es aber, das größte ganzzahlige β zu bestimmen mit

$$Res(x(x+2), E^{\beta}((x-1)(x+2)); x) = \beta^4 - 2\beta^3 - 5\beta^2 + 6\beta = 0$$

da $GFF(a) = [x+2]^{\underline{1}}[x]^{\underline{2}}$. Es gilt $\beta = 3$. Nach der Anwendung des Satzes mußten wir die größte ganzzahlige Nullstelle eines Polynoms vom Grad 4 anstelle eines Polynoms vom Grad 9 bestimmen.

Die vorgestellte Berechnungsmethode für die GFF eines Polynoms p geht davon aus, daß man den Wert $GFE(p)$ berechnet hat. Wir werden im nächsten Abschnitt ein Verfahren vorstellen, das $GFF(p)$ ohne diese Information über p berechnet.

1.7.2 Berechnung der GFF

In diesem Abschnitt stellen wir zuerst das oben beschriebene Verfahren zur Berechnung der GFF als Algorithmus dar. Ferner geben wir ein weiteres Verfahren an, welches für ein Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$ die Darstellung $GFF(p)$ berechnet, ohne vorher den Wert $GFE(p)$ auszurechnen.

Zuerst also beschreiben wir einen Algorithmus zur Methode, die anhand eines Beispiels nach der Definition der Greatest-Factorial Factorization verdeutlicht wurde.

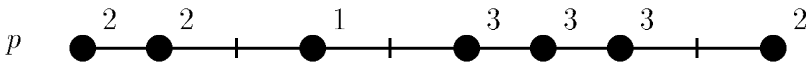
Algorithmus 1.2 *(Zur Berechnung der Greatest-Factorial Factorization eines Polynoms)*

Input: *Polynom* $p \in \mathcal{K}[x]$
Output: *Polynome* $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathcal{K}[x]$ *mit* $GFF(p) = [q_1]^{\underline{1}} \cdots [q_k]^{\underline{k}}$
  Wiederhole für $i = k, k-1, \ldots, 1$
    Setze $q_i = gcd(p, Ep, \ldots, E^{i-1}p)$
    Setze $p = p/[q_i]^{\underline{i}}$
  Gib $q_1, \ldots, q_k$ *als Ergebnis zurück*

In Folgendem stellen wir ein weiteres Verfahren zur Berechnung von $GFF(p)$ vor. Bei diesem Verfahren wird der Wert von $GFE(p)$ nicht benötigt, da man zuerst das Polynom q_1 bestimmt.

Zur Verdeutlichung der Methode betrachten wir zuerst ein stark vereinfachtes Beispiel. Die Übertragung des Verfahren auf allgemeine Polynome wird weiter unten beschrieben.

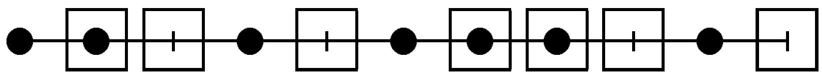
Sei $p \in \mathcal{K}[x]$ ein Polynom mit nur einer Shift-Äquivalenzklasse, etwa $ShiftRep(p) = \{p_1\}$ und habe $ShiftGraph(p)$ folgende graphische Darstellung.



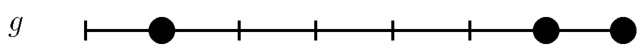
Aus dem Bild kann man direkt die GFF von p ablesen. Es gilt

$$GFF(p) = [(E^3p_1)(E^9p_1^2)]^{\underline{1}}[p_1^2(Ep_1^2)]^{\underline{2}}[(E^5p_1^3)(E^6p_1^3)(E^7p_1^3)]^{\underline{3}} = [q_1]^{\underline{1}}[q_2]^{\underline{2}}[q_3]^{\underline{3}}$$

Wir bestimmen zuerst das Polynom q_1. Betrachten wir $g = gcd(p, Ep)$. Die graphische Darstellung von g erhält man durch die Überlagerung des Graphen von p und des um eine Stelle versetzten Graphen von p.



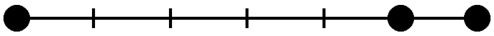
Der Graph von g hat also folgende Form, die durch Durchschnittsbildung gewonnen wird.



In g sind alle Shift-Folgen maximaler Länge aus p enthalten, wobei aber der linke Endpunkt gelöscht wurde. Deshalb enthält der Graph von p/g nur die linken Endpunkte aller Shift-Folgen maximaler Länge in p, also $q_1E^{-1}q_2E^{-2}q_3$.

p/g 

Andererseits sind in $E^{-1}g$ alle Shift-Folgen ohne den rechten Endpunkt enthalten.

$E^{-1}g$ 

Daher enthält der Graph von $pr = p/E^{-1}g$ nur die rechten Endpunkte, also $q_1 q_2 q_3$.

$p/E^{-1}g$ 

Der Durchschnitt der Graphen, also $gcd(p/g, pr)$ wird dann nur die Punkte enthalten, die sowohl rechte als auch linke Endpunkte einer Shift-Folge maximaler Länge in p sind. Das ist nur dann der Fall, wenn die Shift-Folge Länge Eins hat. Deshalb gilt $gcd(p/g, pr) = q_1$. Das Verfahren wird auf g iteriert, um q_2 und q_3 zu bestimmen. Man bemerke, daß bei der iterierten Anwendung des Verfahrens nur ein gcd ausgerechnet werden muß. Im zweiten Schritt gilt nämlich $p_{neu} = g$, $pr_{neu} = pr/p_1$ und $g_{neu} = E(p_{neu}/pr_{neu})$.

In diesem Beispiel wurden zwei spezielle Eigenschaften von p vorausgesetzt: $|ShiftRep(p)| = 1$ und die Shift-Folgen haben keinen gemeinsamen Punkt. Die Überlegung bleibt aber auch für allgemeine Polynome p mit $GFF(p) = [q_1]^{\underline{1}} \cdots [q_k]^{\underline{k}}$ gültig. Für die Gleichung $gcd(p/g, pr) = q_1$ verwendet man hier die Aussage 2 aus der Definition der Greatest-Factorial Factorization für den Fall $h = j - 1$. Es gilt dann

$$gcd(q_i, E^{-j+1}q_j) = 1 \qquad \text{für alle} \qquad i, j \in \{2, 3, \ldots, k\}$$

In folgendem Algorithmus wird dieses effiziente Verfahren zur Bestimmung von $GFF(p)$ beschrieben.

Algorithmus 1.3 *(Zur Bestimmung der GFF eines Polynoms)*

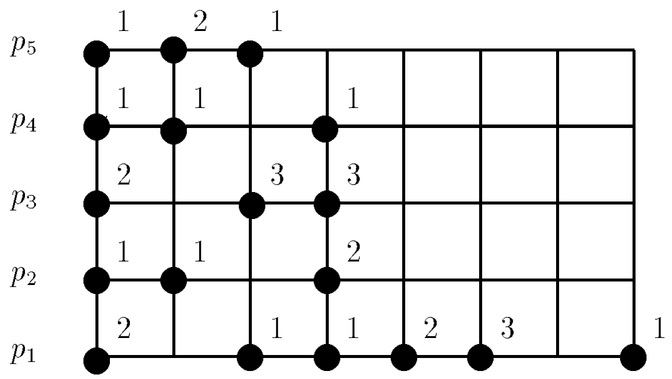
Input: $p \in \mathcal{K}[x]$.
Output: $q_1, \ldots, q_k \in \mathcal{K}[x]$ *mit* $GFF(p) = [q_1]^{\underline{1}} \cdots [q_k]^{\underline{k}}$.
 Setze $i \leftarrow 1$
 Setze $g \leftarrow gcd(p, Ep)$, $pr \leftarrow p/(E^{-1}g)$ *und* $p_i \leftarrow gcd(p/g, pr)$
 Wiederhole solange $g \neq 1$
  Setze $i \leftarrow i + 1$
  Setze $p \leftarrow g$, $pr \leftarrow pr/p_{i-1}$, $g \leftarrow E(p/pr)$ *und* $p_i \leftarrow gcd(p/g, pr)$
Gib $(p_1, \ldots, p_k)$ *als Ergebnis zurück*

Wir haben schon gesehen, daß die faktoriellen Teile der GFF eines Polynoms i.allg. nicht teilerfremd sind. Diese Eigenschaft ist insbesondere für den Algorithmus von Moenck wichtig. Im nächsten Abschnitt führen wir einen neuen Begriff ein, mit dessen Hilfe wir einige Aussagen über die Lösung des Problems (IRS) angeben werden.

1.8 Die Shift-Saturated Extension

Die Greatest-Factorial Factorization eines Polynoms hat uns die Möglichkeit gegeben, die Berechnung der Dispersion durch Resultanten zu vereinfachen. In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der **Shift-Saturated Extension**, i. Z. $ShiftSat(p)$, vorstellen.

Wir führen wie üblich den Begriff anhand eines Beispiels ein. Betrachten wir das Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$ mit $ShiftRep = \{p_1, \ldots, p_5\}$ und sei $ShiftGraph(p)$ gegeben durch folgende Abbildung.



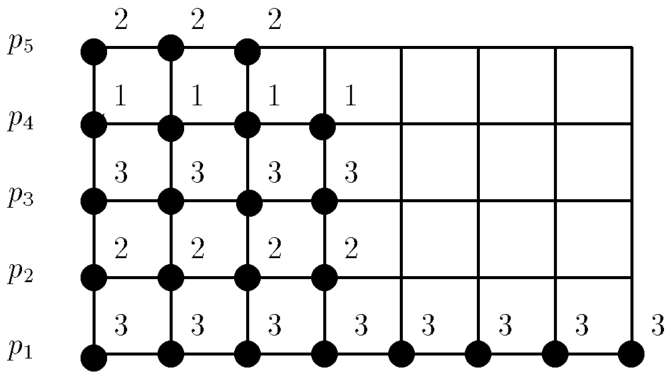
Die Shift-Äquivalenzklassen von p werden insofern vervollständigt, als der Graph keine Lücken bei gleichem Umriß mehr aufweist. Es gilt also

$$ShiftGraph(ShiftSat(p)) = \{(l, j)\,;\, \exists (i, j) \in ShiftGraph(p) : i \geq l\} \subset \mathbb{N}^2$$

Jeder Punkt bekommt als Bewertung die maximale in der dazugehörenden Äquivalenzklasse auftretende Bewertung, also

$$m_{ShiftSat(p)}(i, j) = mult_p(p_j)$$

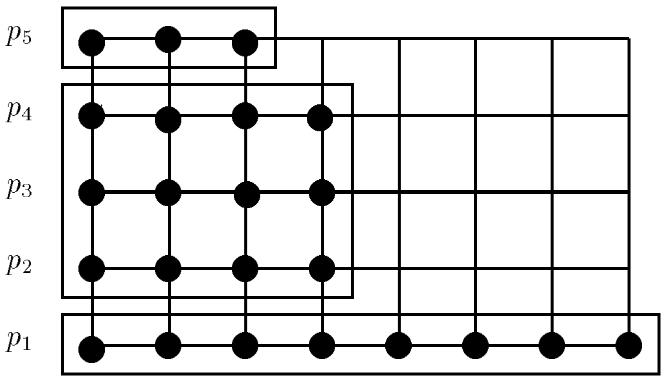
für alle $(i, j) \in ShiftGraph(ShiftSat(p))$. In unserem Beispiel wird die Shift-Saturated Extension von p folgendermaßen dargestellt.



Der Name $ShiftSat(p)$ ist dadurch gerechtfertigt, daß der beschriebene Vorgang in gewissem Sinne einer Sättigung der Shift-Struktur des Polynoms p entspricht.

Bemerkung 1.5 *Für zwei Polynome $p, q \in \mathcal{K}[x]$ kann man aus obigem Verfahren folgendes folgern: falls $ShiftRep(p) = ShiftRep(q)$, $ShiftGraph(p)$ und $ShiftGraph(q)$ gleichen Umriß haben und $mult(p_i) = mult(q_i)$ für alle i gilt, dann gilt auch $ShiftSat(p) = ShiftSat(q)$. Dies bedeutet, daß auf die Shift-Saturated Extension eines Polynoms p nur der Umriß des Shift-Graphen und die maximalen auftretenden Vielfachheiten einen Einfluß haben.*

Die Greatest-Factorial Factorization von $ShiftSat(p)$ bekommt man, indem man die Shift-Folgen gleicher Länge zu einem falling factorial zusammenfaßt. In dem Beispiel bedeutet dies, daß $GFF(ShiftSat(p)) = [E^7 p_1^3]^{\underline{8}}[E^3(p_2^2 p_3^3 p_4)]^{\underline{4}}[E^2 p_5^2]^{\underline{3}}$.



Der Begriff der Shift-Saturated Extension wird auf natürliche Weise auf rationale Funktionen übertragen. Wenn $r \in \mathcal{K}(x)$ eine rationale Funktion mit reduzierter Darstellung $r = a/b$ ist, wobei $deg\, b \geq 1$, dann sagen wir, daß die Polynome

$$\beta = ShiftSat(b) \in \mathcal{K}[x]$$

und

$$\alpha = a \cdot \frac{\beta}{b}$$

die Shift-Saturated Form von r darstellen, denn es gilt

$$r = \frac{\alpha}{\beta}$$

Es ist offensichtlich, daß die SFF einer rationalen Funktion eindeutig ist, falls das Nenner-Polynom normiert ist.

Die Shift-Saturated Extension von Polynomen wird eine wesentliche Rolle bei der Behandlung des Problems der indefiniten Summation rationaler Funktionen spielen. Im nächsten Abschnitt werden die wichtigsten Tatsachen vorgestellt, die in diesem Zusammenhang nützlich sind.

1.8.1 Eigenschaften von $ShiftSat(p)$

Wir fassen einige Eigenschaften der Shift-Saturated Extension eines Polynoms in folgendem Satz zusammen.

Satz 1.4 *Sei $p \in \mathcal{K}[x]$ ein normiertes Polynom mit $\deg p \geq 1$ und sei die Shift-Saturated Extension von p $ShiftSat(p)$ gegeben durch ihre GFF $[q_1]^{\underline{1}} \cdots [q_n]^{\underline{n}}$, dann gilt*

1. $n = dis\,(p) + 1 = dis\,(ShiftSat(p)) + 1 = GFE(ShiftSat(p))$.
2. *Für alle $h \in \mathbb{Z}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$: falls $i \neq j$, dann*
$$gcd\,(q_i, E^{-h} q_j) = 1$$
3. *Für alle $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$: falls $q_i \neq 1$, dann*
$$gcd\,(q_i, E^{-h} q_i) = 1$$
4. *Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$: falls $q_i \neq 1$, dann*
$$i = dis\,([q_1]^{\underline{1}} \cdots [q_i]^{\underline{i}}) + 1 = dis\,([q_i]^{\underline{i}}) + 1$$

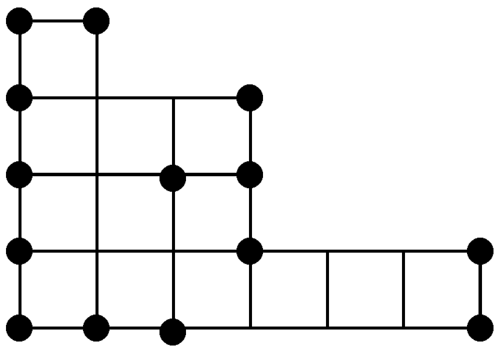
Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition der Shift-Saturated Extension. □

Die durchgeführte Sättigung der Shift-Äquivalenzklassen von p gewährleistet, daß die einzelnen falling factorials in der Greatest-Factorial Factorization der Shift-Saturated Extension von p teilerfremd sind (Aussagen 2 und 3 vom obigen Satz). Wie oben schon bemerkt, ist das ein wesentlicher Unterschied zu $GFF(p)$.

Bevor wir unten einen Satz über die Lösung des Problems (IRS) angeben können, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1.3 *Sei $d \in \mathcal{K}[x]$ ein normiertes Polynom mit $\deg d \geq 1$. Dann gilt*
$$ShiftSat(lcm\,(d, Ed)) = lcm\,(\delta, E\delta)$$
wobei $\delta = ShiftSat(d)$.

Beweis: Sei die Shift-Struktur des Polynoms d gegeben durch den Graphen



Sei jetzt $p = lcm\,(d, Ed)$. Wegen der Beziehung

$$Fac(p) = Fac(d) \cup Fac(Ed) = \{t, Et\,;\, t \in Fac(d)\}$$

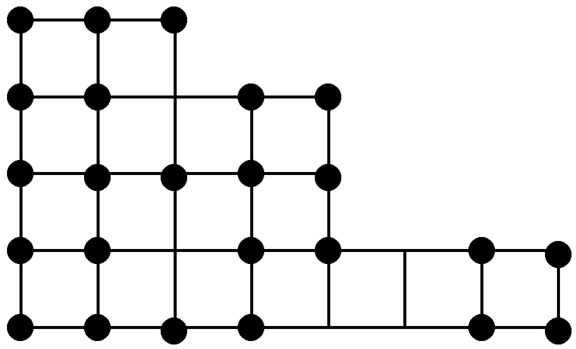
gilt auch

$$ShiftRep(p) = ShiftRep(d) = \{d_1, \ldots, d_n\}$$

und

$$ShiftGraph(p) = ShiftGraph(d) \cup \{(i+1, j)\,;\, (i,j) \in ShiftGraph(d)\}$$

Somit erhalten wir den Graphen für p, indem wir den Graphen von d mit sich selbst, aber um eine Spalte versetzt, überlappen. Im obigen Beispiel erhalten wir für $ShiftGraph(p)$:



Insbesondere ist jede Shift-Äquivalenzklasse von p um ein Element länger als die entsprechende Klasse von d, d.h.

$$l_p(d_i) = l_d(d_i) + 1$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Für die Vielfachheit der einzelnen Teiler von p, also für die Bewertung der einzelnen Punkte im Graphen, gilt

$$m_p(i,j) = \max\{m_d(i,j), m_d(i-1,j)\}$$

für alle Punkte (i,j) und somit auch

$$mult_p(d_i) = mult_d(d_i)$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Für $\delta = ShiftSat(d)$ gilt bekanntlich

$$ShiftRep(\delta) = ShiftRep(d)$$

Dies zieht sofort nach sich, daß für das Polynom $q = lcm\,(\delta, E\delta)$ gilt

$$ShiftRep(q) = ShiftRep(d)\ (= ShiftRep(p)\,) \tag{1.12}$$

Da die Länge der Shift-Äquivalenzklassen durch die Bildung der Shift-Saturated Extension nicht geändert wird, gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$l_\delta(d_i) = l_d(d_i)$$

und somit, nach ähnlichen Überlegungen wie oben,

$$l_q(d_i) = l_\delta(d_i) + 1 = l_d(d_i) + 1 \ (= l_p(d_i)) \tag{1.13}$$

Für die Bewertung der Punkte haben wir, daß

$$m_q(i,j) = \max\{m_\delta(i,j), m_\delta(i-1,j)\}$$

Da δ Shift-Saturated Extension ist, gilt

$$m_\delta(i,j) = mult_d(d_j)$$

und somit

$$m_q(i,j) = mult_d(d_j)$$

und

$$mult_q(d_i) = mult_d(d_i) \ (= mult_p(d_i)) \tag{1.14}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aus (1.12), (1.13) wissen wir, daß die Graphen von p und q gleichen Umriß haben. Ferner wissen wir aus (1.14), daß gleiche maximale Vielfachheiten in den Äquivalenklassen beider Polynome auftreten. Aus dem Verfahren zur Bestimmung der Shift-Saturated Extension ist dann offensichtlich, daß

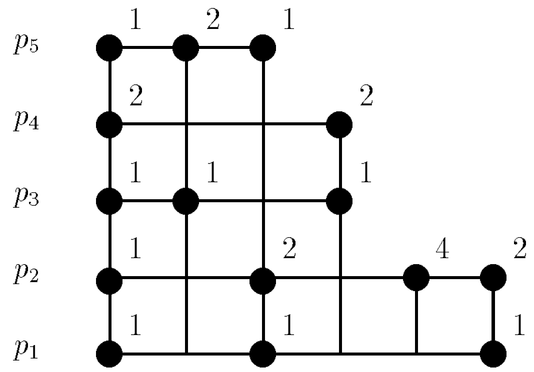
$$ShiftSat(p) = ShiftSat(q)$$

Mit $ShiftSat(q) = q$ ist die Aussage bewiesen. $\square$

1.8.2 Berechnung der Shift-Saturated Form

In diesem Abschnitt beschreiben wir einen Algorithmus zur Bestimmung der Shift-Saturated Form einer rationalen Funktion. Dabei wird nur der Wert der Dispersion des Nenner-Polynoms benötigt und sonst keine weitere Information über die Shift-Struktur des Polynoms.

Betrachten wir ein beliebiges Polynom $p \in \mathcal{K}[x]$ mit $ShiftRep(p) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sei $ShiftGraph(p)$ als Beispiel folgendermaßen dargestellt.



Sei ferner $d = dis\ p$. Wir suchen die Greatest-Factorial Factorization der Shift-Saturated Extension von p in der Form

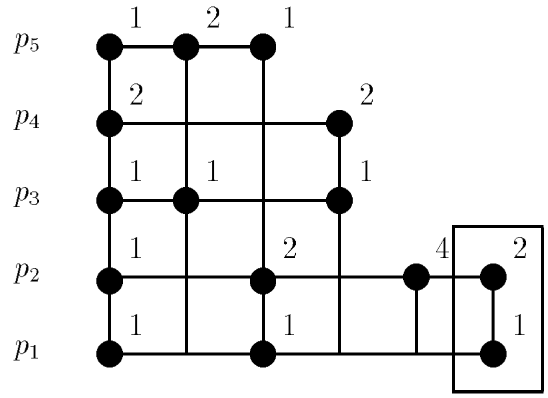
$$ShiftSat(p) = [q_1]^{\underline{1}}[q_2]^{\underline{2}} \cdots [q_k]^{\underline{k}}$$

wobei $k = d + 1$. Wir berechnen zuerst das Polynom q_k.

Die Teiler von q_k entsprechen den rechten Endpunkten der längsten Äquivalenzklassen von p, die wir durch $gcd\,(p, E^d p)$ berechnen können. Da wir an der maximalen auftretenden Vielfachheit jeden Teilers interessiert sind, betrachten wir das Polynom

$$q^{(1)} = part(gcd\,(p, E^d p), p)$$

In dem Beispiel gilt $k = 6$ und das Polynom $q^{(1)}$ entspricht den ausgezeichneten Endpunkten in folgender Abbildung.

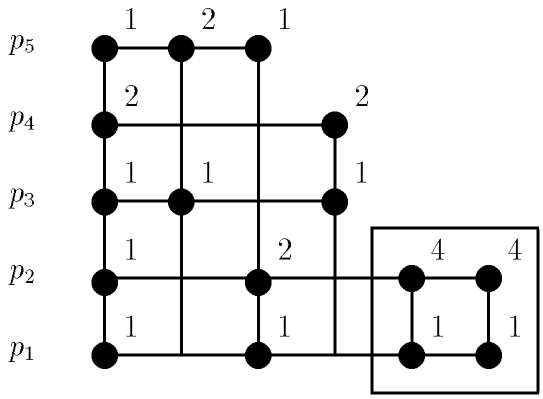


Das Polynom $q^{(1)}$ enthält schon alle Primteiler von q_k. Um die maximale Multiplizität zu bestimmen, laufen wir schrittweise $[q_k]^{\underline{k}}$ rückwärts durch.

Wir berechnen zuerst den Anteil von $E^{-1}q^{(1)}$ in p. Im nächsten Schritt berücksichtigen wir dann, ob dabei höhere Multiplizitäten als in $q^{(1)}$ aufgetreten sind. Wir bestimmen also

$$q^{(2)} = lcm\,(E^{-1}q^{(1)}, part(E^{-1}q^{(1)}, p))$$

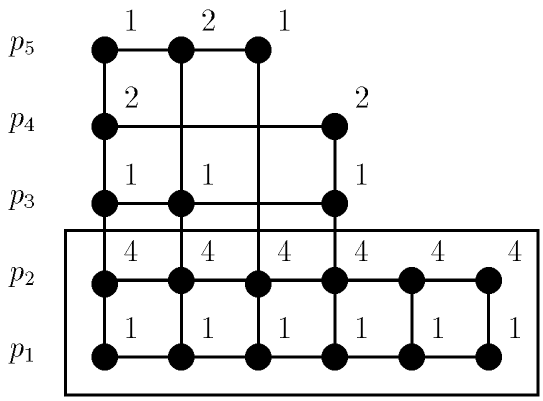
In unserem Beispiel gilt $q^{(2)} = (E^4 p_2^4)(E^4 p_1)$ und die „momentane“ Shift-Sättigung sieht folgendermaßen aus:



Durch dieses Verfahren erhalten wir nach k Iterationen das Polynom $q^{(k)}$, das alle Teiler mit der dazugehörigen maximalen Multiplizität enthält. Es gilt also

$$q_k = E^{k-1} q^{(k)}$$

In unserem Beispiel ist $q_6 = (E^5 p_1)(E^5 p_2^4)$.



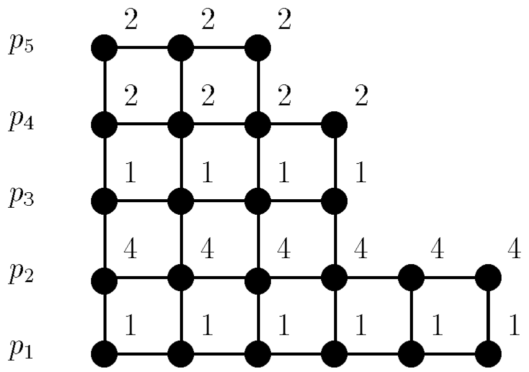
Wir wenden das Verfahren iterativ auf das Polynom

$$p' = \frac{p}{part([p_k]^{\underline{k}}, p)}$$

mit der bekannten Tatsache an, daß $dis\ p' < dis\ p$.

Somit können wir die Shift-Saturated Extension des Polynoms berechnen. Dabei werden höchstens $k + (k-1) + \cdots + 2 + 1 = k(k+1)/2$ Berechnungen von Anteilen benötigt.

Die Shift-Saturated Extension des als Beispiel angegebenen Polynoms sieht folgendermaßen aus.



Wir geben jetzt den Algorithmus zu diesem Verfahren an.

Algorithmus 1.4 *(Zur Berechnung der Shift-Saturated Extension)*

Input: *Polynom* $p \in \mathcal{K}[x]$
Output: *Polynome* $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{K}[x]$ *mit* $ShiftSat(p) = [q_1]^{\underline{1}} \cdots [q_n]^{\underline{n}}$
  Berechne $d \leftarrow dis\ p$
  Wiederhole für $k = d+1, d, \ldots, 1$
    Setze $q \leftarrow gcd\,(p, E^{k-1}p)$
    Wiederhole für $i = k, k-1, \ldots, 1$
      Setze $q \leftarrow E^{-1}part(q, p)$
    Setze $q_k \leftarrow E^k q$
    Setze $p \leftarrow p/part([q_k]^{\underline{k}}, p)$
  Gib $q_1, \ldots, q_{d+1}$ *als Ergebnis zurück*

Aus der Shift-Saturated Extension des Nenner-Polynoms $b \in \mathcal{K}[x]$ einer rationalen Funktion $r \in \mathcal{K}(x)$ mit normierter Darstellung $r = a/b$ bekommt man die Shift-Saturated Form $r = \alpha/\beta$ durch

$$\beta = ShiftSat(b) \qquad \text{und} \qquad \alpha = a \cdot \frac{\beta}{b}$$

Nachdem wir in der Lage sind, die Shift-Saturated Form einer rationalen Funktion zu bestimmen, ohne die Zerlegung des Nenner-Polynoms zu kennen, werden wir im nächsten Abschnitt einige wichtige Anwendungen dieses Begriffs vorstellen.

1.9 Struktur der Lösungen

Der Begriff der Shift-Saturated Form einer rationalen Funktion ermöglicht uns, Aussagen über das Problem der indefiniten Summation zu beweisen.

Folgender wichtiger Satz beschreibt die Struktur der Lösung von Problem (IRS), falls sie existiert. Er liefert gleichzeitig eine Methode, um eine solche Lösung zu berechnen.

Satz 1.5 *Sei $r \in \mathcal{K}(x)$ eine rationale Funktion mit reduzierter Darstellung $r = a/b$ für $a, b \in \mathcal{K}[x]$ und $\deg b \geq 1$. Sei $s \in \mathcal{K}(x)$ eine rationale Funktion mit reduzierter Darstellung $s = c/d$ für $c, d \in \mathcal{K}[x]$. Seien ferner*

$$r = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{und} \qquad s = \frac{\gamma}{\delta}$$

die Shift-Saturated Form von r und s. s ist genau dann Lösung der Gleichung

$$\Delta s = Es - s = r$$

wenn folgende Aussagen gelten:

1. *Für das Nenner-Polynom δ der Shift-Saturated Form der Lösung s haben wir*

$$\delta = gcd\,(\beta, E^{-1}\beta)$$

2. *Das Zähler-Polynom γ der Shift-Saturated Form der Lösung s genügt folgender polynomialen Differenzengleichung:*

$$\alpha = \frac{\beta}{E\delta} \cdot (E\gamma) - \frac{\beta}{\delta} \cdot \gamma$$

(dabei ist zu beachten, daß $deg\,(\gamma) < deg\,(\delta)$ gelten muß).

Beweis:

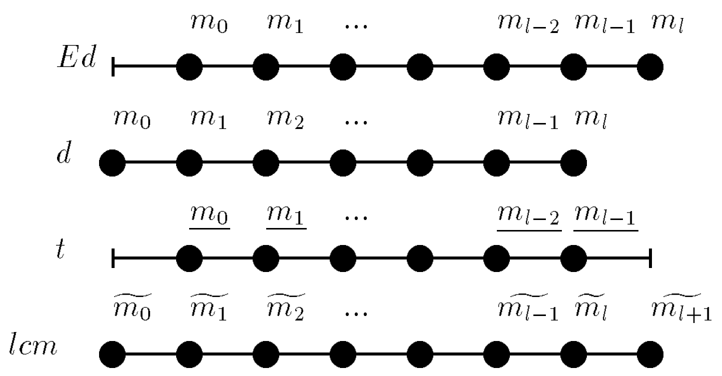
Wir nehmen an, daß $\Delta s = r$. Dann gilt für r und s:

$$r = \frac{a}{b} = \Delta s = \frac{\dfrac{dEc - cEd}{t \cdot t_0}}{\dfrac{dEd}{t \cdot t_0}}$$

wobei $t = gcd\,(d, Ed)$, $t_0 = gcd\,(t, (Ec)\frac{d}{t} - c(\frac{Ed}{t}))$ und die rechte Seite der Gleichung schon reduziert ist, also $b = dEd/(t \cdot t_0)$.

Zur Verdeutlichung nehmen wir jetzt an, daß das Polynom d nur eine Shift-Äquivalenzklasse besitzt, etwa $ShiftRep(d) = \{p\}$.

Betrachten wir jetzt die Shift-Struktur der Polynome $d, Ed, t = gcd\,(d, Ed)$ und $lcm\,(d, Ed)$.



Wobei $m_i \geq 0$ die Vielfachheit von $E^i p$ als Teiler von d ist, $\underline{m_i} := \min\{m_i, m_{i+1}\}$ und $\widetilde{m_i} := \max\{m_i, m_{i-1}\}$ mit $\widetilde{m_0} := m_0$. Insbesondere soll gelten $m_0 > 0$ und $m_l > 0$. Da $t_0 \mid t$ gilt, wissen wir, daß die Endpunkte der Klasse in b erhalten bleiben. Die Länge der Shift-Klasse in b ist also gleich der Länge der Klasse in $lcm\,(d, Ed)$. Wenn wir zeigen könnten, daß auch die maximale auftretende Vielfachheit nicht verändert wird, hätten wir gezeigt, daß

$$\beta = ShiftSat(b) = ShiftSat(lcm\,(d, Ed)) = lcm\,(\delta, E\delta)$$

Dafür betrachten wir die Knoten im Graphen von $lcm\,(d, Ed)$, welche die maximale Bewertung $m := mult_d(p)$ besitzen. Sei also $0 \leq i \leq (l+1)$ so, daß $\widetilde{m_i} = m$ und i ist maximal bezüglich dieser Eigenschaft.

Wir beweisen, daß $E^i p^m \mid b$ gilt. Falls $i = 0$ oder $i = (l+1)$, dann tritt die maximale Vielfachheit m schon in einem der Endpunkte der Klasse auf. Diese Endpunkte werden aber durch die Division durch t_0 nicht beeinflußt und somit bleibt die Vielfachheit in b unverändert.

Falls andererseits $0 < i < (l+1)$ gilt, dann können wir beobachten, daß

$$m_{i-1} = m \qquad \text{und} \qquad m_i < m$$

gelten muß. Dies folgt aus der Definition von $lcm\,(d, Ed)$. Somit gilt aber auch $\underline{m_{i-1}} = m_i < m$. Dies bedeutet, daß im Polynom d/t kein Teiler $E^i p$ mehr auftritt, aber wohl in Ed/t. Wir haben, daß

$$E^i p \not| \frac{d}{t} Ec - c\frac{Ed}{t}$$

und somit $E^i p \not| t_0$. Die Division von $lcm\,(d, Ed)$ durch t_0 kann also die Vielfachheit von $E^i p$ nicht vermindern. Das Polynom $E^i p^m$ ist dann Teiler von b.

Wir haben gezeigt, daß $\beta = lcm\,(\delta, E\delta)$ und somit

$$\delta = gcd\,(\beta, E^{-1}\beta)$$

Die Eigenschaft 2 folgt aus

$$r = \Delta s$$

durch Einsetzen von $r = \alpha/\beta$ und $s = \gamma/\delta$.

Nehmen wir jetzt an, daß beide Aussagen gelten. Aus den Aussagen 1 und 2 folgt direkt, daß $r = \Delta s$. Nachdem δ berechnet werden kann, reicht es, beide Seiten der Gleichung aus der Aussage 2

$$\alpha = \frac{\beta}{E\delta} \cdot (E\gamma) - \frac{\beta}{\delta} \cdot \gamma$$

durch β zu dividieren. □

Im letzten Beweis wurde folgende wichtige Tatsache verwendet, welche man sehr leicht nachprüfen kann.

Bemerkung 1.6 *Wenn das Problem (IRS) für die rationale Funktion r eine rationale Lösung besitzt, dann zerfällt das Nenner-Polynom von r in Shift-Klassen, welche mindestens Länge Zwei besitzen.*

Daraus folgt unmittelbar folgender Satz.

Satz 1.6 *Sei $r \in \mathcal{K}(x)$ eine rationale Funktion mit $r = a/b$ als reduzierte Darstellung. Sei ferner $r = \alpha/\beta$ die Shift-Saturated Form von r mit $GFF(\beta) = [\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}$. Wenn gilt*

$$deg\,\beta_1 \geq 1, \qquad d.h. \qquad \beta_1 \neq 1$$

dann existiert keine rationale Funktion $s \in \mathcal{K}(x)$, die folgender Differenzengleichung genügt

$$\Delta\, s = r$$

Bemerkung 1.7 *Der letzte Satz stellt eine Verschärfung des Kriteriums für die Nicht-Existenz einer Lösung für Problem (IRS) dar, das aus dem Korollar 1.2 hervorging. Falls nämlich dis $b = 0$ gilt, dann auch dis $\beta = 0$ und somit $\beta = [\beta_1]^{\underline{1}} = \beta_1$. Dann gilt auch $\beta_1 \neq 1$.*

Alternativer Beweis zum Satz 1.5

Wir geben hier einen Beweis zum Satz 1.5, welcher die Information über den Knoten mit maximaler Bewertung nicht benötigt.

Wir nehmen an, daß $\Delta s = r$. Dann gilt für r und s:

$$r = \frac{\alpha}{\beta} = \Delta s = \frac{\dfrac{\delta E\gamma - \gamma E\delta}{\tau\tau_0}}{\dfrac{\delta E\delta}{\tau\tau_0}}$$

wobei $\tau = gcd\,(\delta, E\delta)$ und $\tau_0 = gcd\,(lcm\,(\delta, E\delta), (E\gamma)\frac{\delta}{\tau} - \gamma(\frac{E\delta}{\tau}))$ und die rechte Seite der Gleichung schon reduziert ist. Nennen wir $\tilde{\beta}$ das Polynom $lcm\,(\delta, E\delta)/\tau_0$. Dann gilt, wegen der Eindeutigkeit der Shift-Saturated Form, daß

$$\beta = ShiftSat(b) = ShiftSat(\tilde{\beta})$$

Aus der Definition von τ_0 gilt insbesondere

$$\tau_0 \,|\, (E\gamma)\frac{\delta}{\tau} - \gamma(\frac{E\delta}{\tau}) \tag{1.15}$$

Wir zeigen, daß $ShiftSat(\tilde{\beta}) = ShiftSat(lcm\,(\delta, E\delta))$ gilt.

Sei jetzt $ShiftRep(d) = ShiftRep(\delta) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und m_i die Vielfachheit von p_i in δ für alle $i = 1, \ldots, n$. Damit die Shift-Saturated Extension von $lcm\,(\delta, E\delta)$ durch die Division durch τ_0 beeinflußt wird, muß einer der folgenden Fälle für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ auftreten:

1. Die Länge der Shift-Klasse von p_i in $\tilde{\beta}$ ist kleiner als die der entsprechenden Klasse in $lcm\,(\delta, E\delta)$. Es gilt also $p_i^{m_i} \,|\, \tau_0$ oder $E^{l_d(p_i)} p_i^{m_i} \,|\, \tau_0$.
2. Die Vielfachheit von p_i in $\tilde{\beta}$ ist kleiner als die in $lcm\,(\delta, E\delta)$.

Zu 1: Wir wissen, daß das Polynom δ/τ genau alle linken Endpunkte der Äquivalenzklassen von δ enthält, und somit $p_i^{m_i} \,|\, \delta/\tau$. Ferner enthält $E\delta/\tau$ genau alle rechten Endpunkte von δ, und somit $p_i^{m_i} \nmid E\delta/\tau$. Dies ergibt mit (1.15), daß $p_i^{m_i} \,|\, \gamma$. Wenn $p_i^{m_i} \,|\, \tau_0$, dann haben wir also einen Widerspruch zur Definition von γ. Analog kann man sich überlegen, daß auch $E^{l_d(p_i)} p_i^{m_i} \,|\, \tau_0$ zu einem Widerspruch führt.

Zu 2: Dies bedeutet, daß durch die Division durch τ_0 die Vielfachheit von jedem Knoten in der Klasse von p_i erniedrigt wird, also $p_i(Ep_i)(E^2 p_i) \cdots (E^{l_d(p_i)} p_i) \,|\, \tau_0$.

Wir haben schon gesehen, daß in δ/τ bzw. in $E\delta/\tau$ nur die linken bzw. rechten Endpolynome jeder Äquivalenzklasse enthalten sind und somit $p_i \,|\, \delta/\tau$ und $p_i \nmid E\delta/\tau$. Mit (1.15) bedeutet dies

$$p \,|\, \gamma$$

und somit $Ep \,|\, E\gamma$. Wenn Ep_i noch kein rechter Endpunkt der Klasse ist, dann gilt $Ep \not| \, E\delta/\tau$ und wir haben wieder mit (1.15)

$$Ep \,|\, \gamma$$

Daraus folgt $E^2 p \,|\, E\gamma$ und wir können obige Beobachtung fortsetzen bis wir zum rechten Endpunkt ankommen. Wir stellen somit fest, daß

$$p_i(Ep_i)(E^2 p_i) \cdots (E^{l_d(p_i)-1} p_i) \,|\, \gamma$$

Wir hätten also eine Äquivalenzklasse von d in ihrer ganzen Länge als Teiler von γ vertreten. Dies steht offensichtlich in Widerspruch zur Definition der Shift-Saturated Form einer rationalen Funktion, bei der keine überflüssige Sättigung durchgeführt wird.

Wir haben gezeigt, daß die Graphen zu $\tilde{\beta}$ und β gleichen Umriß und gleiche auftretenden maximalen Vielfachheiten besitzen. Daraus folgt

$$\beta = ShiftSat(b) = ShiftSat(\tilde{\beta}) = lcm\,(\delta, E\delta)$$

Ab dieser Stelle ist der Rest des Beweises zum Satz 1.5 zu verwenden.

1.9.1 Rationaler und nicht-rationaler Teil

Bis jetzt haben wir uns nur dafür interessiert, eine genaue Lösung des Problems der indefiniten Summation anzugeben. Wenn $r \in \mathcal{K}(x)$ aber eine rationale Funktion ist, die keine rationale Lösung der indefiniten Summation besitzt, dann stellt sich die natürliche Frage, inwieweit die Funktion r folgendermaßen darstellbar ist

$$r = r_{sum} + \tilde{r}_{sum} \tag{1.16}$$

Dabei sollen r_{sum} und $\tilde{r}_{sum}$ aus $\mathcal{K}(x)$ stammen und für die Funktion r_{sum} soll ein $s \in \mathcal{K}(x)$ existieren, für welches gilt

$$r_{sum} = \Delta\, s$$

während für $\tilde{r}_{sum}$ keine rationale Summation existieren soll.

Wir zerlegen die aufzusummierende Funktion r in einen rationalen (aufsummierbaren) Teil und in einen Rest, der nicht aufsummierbar ist.

Es wird i. allg. verschiedene Funktionen r_{sum} und $\tilde{r}_{sum}$ geben, die solch einer Eigenschaft genügen. Beispielsweise ist sowohl

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+3)^2(x^2+1)} \quad &= \quad -\frac{1}{450}\Delta\,\frac{42x^5+255x^4+544x^3+522x^2+236x+60}{(x+2)^2(x+1)^2x^2} \\ &\quad -\frac{1}{150}\frac{14x^2-12x+5}{x^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

als auch

$$\frac{1}{x(x+3)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{9}\Delta\,\frac{3x^2+6x+2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{3}\frac{x^2+3x+1}{(x+3)^2(x^2+1)}$$

Zerlegung der Form (1.16), denn beide Reste sind wegen Satz 1.6 nicht aufsummierbar. Die unten vorgestellten Algorithmen von Paule, von Moenck und von Abramow liefern aber eine Darstellung, die den Rest $\tilde{r}_{sum}$ minimieren.

In welchem Sinne der Rest minimal sein soll, wird durch folgende Definition erläutert. Dieser Begriff stammt aus einer Arbeit von Abramow (s. [A75]) und spielt in den folgenden Betrachtungen eine wesentliche Rolle.

Definition 1.4 *Seien $r, t \in \mathcal{K}(x)$ rationale Funktionen. Wir sagen, daß t* **Bound** *für r ist, falls es ein $s \in \mathcal{K}(x)$ gibt, mit*

$$r = \Delta\, s + t$$

und das Nenner-Polynom von t minimalen Grad im Bezug auf diese Eigenschaft besitzt.

Wie zu erwarten, ist auch in diesem Zusammenhang die Shift-Struktur der rationalen Funktion von besonderer Bedeutung. Die oben angesprochenen Verfahren von Paule, Moenck und Abramow liefern für jede rationale Funktion r eine Zerlegung wie in (1.16), wobei $dis\ \tilde{r}_{sum} = 0$ gilt.

Wir können also annehmen, daß $dis\ t = 0$ gilt, falls t Bound einer rationalen Funktion r ist. Nehmen wir an, daß $r = \Delta\, s + t$ fü ein s gilt und daß t Bound für r ist. Wenn $dis\, t > 0$ gelten würde, könnte man beispielsweise durch das Verfahren von Paule eine Zerlegung $t = \Delta\, \tilde{s} + \tilde{t}$ bestimmen, wobei das Nenner-Polynom von $\tilde{t}$ kleineren Grad als das von t besitzt und $dis\ \tilde{t} = 0$. Wir hätten dann $r = \Delta\,(s+\tilde{s})+\tilde{t}$, im Widerspruch zur Minimalität des Bounds t.

Ferner zeigen wir, daß wenn $dis\ r = 0$ gilt, dann existiert keine Zerlegung wie in (1.16) mit einem kleineren Rest als r. Dies wird in folgendem Satz ausgedrückt.

Satz 1.7 *Sei $t \in \mathcal{K}(x)$ und $dis\ t = 0$. Dann ist t Bound für t.*

Beweis: Sei also $t = t_1/t_2$ in reduzierter Darstellung mit $dis\ t_2 = 0$. Ferner sei $\tilde{t} \in \mathcal{K}(x)$ Bound für t mit reduzierter Darstellung $\tilde{t} = \tilde{t}_1/\tilde{t}_2$. Dann existiert eine rationale Funktion $s \in \mathcal{K}(x)$ mit normierter Darstellung $s = s_1/s_2$ mit der Eigenschaft

$$t = \Delta\, s + \tilde{t}$$

Wir zeigen, daß $deg\, t_2 = deg\, \tilde{t}_2$.

Es gilt

$$\frac{t_1}{t_2} = \Delta\, s + \tilde{t} = \frac{e \cdot \tilde{t}_2 + f \cdot \tilde{t}_1}{f \cdot \tilde{t}_2}$$

wobei $\Delta\, s = e/f$ in reduzierter Darstellung ist.

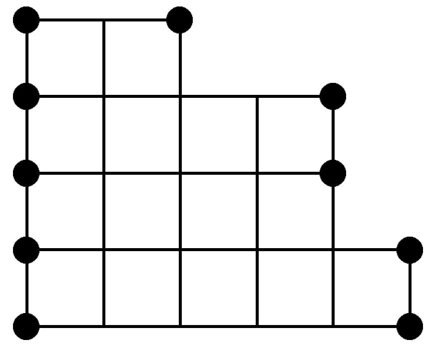
Wir wissen, daß das Nenner-Polynom der reduzierten Darstellung der rechten Seite der Gleichung berechnet wird durch

$$t_2 = \frac{lcm\,(\tilde{t}_2, f)}{\tau_0}$$

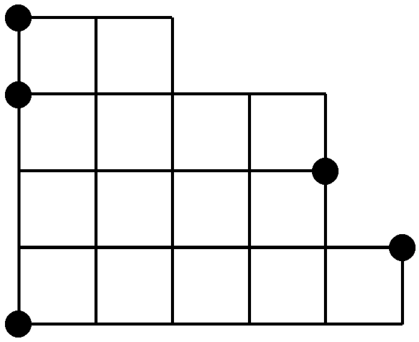
wobei τ_0 ein Teiler von $\tau = gcd\,(\tilde{t}_2, f)$ ist. Aus 1.6 wissen wir auch, daß jede Shift-Klasse von f mindestens Länge Zwei besitzt. Andererseits gilt insbesondere $\tau_0 \mid \tilde{t}_2$ und somit $dis\ \tau_0 = 0$. Das bedeutet, daß jede Shift-Äquivalenzklasse in τ_0 genau ein Polynom enthält. Bei der Division durch τ_0 haben wir also nur die Möglichkeit, aus jeder Klasse von $lcm\,(\tilde{t}_2, f)$ höchstens ein Polynom zu entfernen. In der graphischen Darstellung zu $lcm\,(\tilde{t}_2, f)$ heißt das, daß in jeder Zeile mindestens zwei Knoten liegen und daß nur ein Knoten gelöscht werden kann.

Das Ergebnis der Division hat ebenfalls Dispersion Null, und somit auch nur einen Knoten auf jeder Zeile des Graphen. Daraus folgt, daß jede Shift-Äquivalenzklasse von $lcm\,(\tilde{t}_2, f)$ genau zwei Polynome enthält und eins davon durch die Division immer gelöscht wird. Zwangsläufig gilt auch $\tau_0 = \tilde{t}_2$, denn sonst würde eine Äquivalenzklasse mit zwei Polynomen entstehen.

Die graphische Darstellung der Shift-Struktur von $lcm\,(\tilde{t}_2, f)$ sieht beispielweise folgendermaßen aus



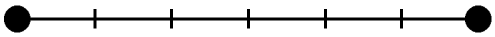
Nach der Division durch τ_0 bekommen wir etwa



Aus dieser Beobachtung folgt, daß alle Primteiler p_i von $\tilde{t}_2$ als Primteiler der Form $E^{k_i}p_i$ in t_2 auftreten. Wiederum besitzt t_2 nur solche Primteiler.

Wir zeigen im folgenden, daß solche Primteiler mit gleicher Häufigkeit auftreten. Damit wäre auch gezeigt, daß $deg\, t_2 = deg\, \tilde{t}_2$.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß f nur in eine Äquivalenzklasse zerfällt, beispielweise wie in der folgenden Abbildung.



Da $e/f = \Delta\, s$ gilt ähnlich wie oben

$$f = \frac{lcm\,(s_2, Es_2)}{\sigma_0}$$

wobei σ_0 ein Teiler von $\sigma = gcd\,(s_2, Es_2)$ ist. Zuerst können wir beobachten, daß zwangsläufig in dem Polynom s_2 alle Knoten in der Zeile vorkommen. Das Polynom s_2 hat also folgende Form

Wenn wir nämlich annehmen, in der Äquivalenzklasse würden einige Knoten nicht auftreten, wie etwa in folgender Darstellung

dann würden in f die ausgezeichneten Knoten enthalten sein, da sie nicht in $gcd\,(s_2, Es_2)$ liegen, aber wohl in $lcm\,(s_2, Es_2)$. Das wäre ein Widerspruch zur Tatsache, daß in f nur die Endpunkte einer Klasse enthalten sind.

Bezeichnen wir mit $h_0, h_1 \ldots, h_n \in \mathbb{N}$ die (positiven) auftretenden Vielfachheiten der Teiler $p_1, Ep_1, \ldots, E^n p_1$ in einer Shift-Klasse von s_2. Verfolgen wir die Multiplizität von $E^i p_1$ für $i = 2, \ldots, n$ durch die Berechnungen.

Für $lcm(s_2, Es_2)$ haben wir für $E^i p_1$ die Vielfachheit $l_i = \max\{h_{i-1}, h_i\}$. In $gcd(s_2, Es_2)$ haben wir $g_i = \min\{h_{i-1}, h_i\}$. Da in σ_0 das Polynom $E^i p_1$ höchstens die Vielfachheit g_i besitzt und im Ergebnis diese gleich Null sein soll, haben wir

$$0 \geq l_i - g_i = \max\{h_{i-1}, h_i\} - \min\{h_{i-1}, h_i\}$$

Daraus folgt direkt $h_{i-1} = h_i$. Somit haben alle Primteiler aus einer Shift-Äquivalenzklasse von s_2 gleiche Multiplizität.

Insbesondere gilt also $h_0 = h_n$. Dies zeigt, daß die als Endpunkte der Shift-Klassen von f auftretenden Polynome gleiche Vielfachheit besitzen. Die Überlegung kann direkt auf Polynome übertragen werden, die mehrere Shift-Klassen besitzen.

Somit gilt die Behauptung. □

Die Aussage dieses Satzes wird von Abramow (s. [A75]) als Korollar angegeben und nicht bewiesen.

Aus dem Beweis des letzten Satzes folgt eine wichtige Aussage, die wir im folgenden Satz darstellen.

Satz 1.8 *Sei $f \in \mathcal{K}(x)$ eine rationale Funktion. Seien ferner t und $\tilde{t}$ Bound für f. Wenn für die normierte Darstellung von t gilt*

$$t = \frac{t_1}{p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}}$$

für irreduzible Polynome $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{K}[x]$, dann existieren $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ so, daß

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{t}_1}{(E^{k_1} p_1^{e_1}) \cdots (E^{k_n} p_n^{e_n})}$$

Beweis: Ist im Beweis zum Satz 1.7 enthalten. □

Aus dem Satz 1.7 folgt, daß die Suche nach einem minimalen Rest in einer Zerlegung der Form (1.16) der Suche nach einem Rest mit Dispersion Null entspricht. Diesen Sachverhalt fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 1.9 *Seien $r, s, t \in \mathcal{K}(x)$ rationale Funktionen mit der Eigenschaft*

$$r = \Delta s + t$$

Dann ist t genau dann Bound für r, wenn $\operatorname{dis} t = 0$.

Beweis: Wenn t Bound für r ist, dann gilt $dis\, t = 0$. Dies folgt aus den in den nächsten Kapiteln vorgestellten Algorithmen. Falls $dis\, t > 0$ gelten würde, wären diese Algorithmen in der Lage, eine Zerlegung der Form (1.16)

$$t = t_{sum} + \tilde{t}_{sum}$$

mit $dis\, \tilde{t}_{sum} = 0$ und $deg\, \tilde{t}_{sum} < deg\, t$ zu bestimmen. Das wäre ein Widerspruch zur Annahme, daß t Bound für r ist.

Falls $dis\, t = 0$, nehmen wir an, $t_0 \in \mathcal{K}(x)$ wäre Bound für r mit kleinerem Grad im Nenner-Polynom als t. Dann hätten wir

$$r = \Delta\, s_0 + t_0$$

für ein $s_0 \in \mathcal{K}(x)$ und somit

$$t = \Delta\,(s_0 - s) + t_0$$

Dies wäre ein Widerspruch zum Satz 1.7. □

Das gestellte Problem (IRS) kann somit folgendermaßen erweitert werden.

Problem 1.2 (IRSB) *Gegeben sei eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$. Bestimme r und t aus $\mathcal{K}(x)$ so, daß gilt*

$$\Delta\, r + t = f \tag{1.17}$$

und t ist Bound für f, d.h. $dis\, t = 0$.

Beispiel: Betrachten wir die rationale Funktion $f \in \mathbb{Q}(x)$, gegeben durch folgende reduzierte Darstellung

$$f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{x}{x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}}$$

Es gilt $ShiftSat(f_2) = [x - 1/2]^{\underline{1}}[x + 3]^{\underline{3}}$. Wegen des Satzes 1.6 besitzt die Gleichung

$$\Delta\, g = f$$

keine rationale Lösung g. Andererseits überprüft man leicht, daß

$$f = \Delta\, r + t$$

für folgende r und t gilt, wie etwa durch den Algorithmus von Abramow [75] berechnet wird.

$$r = \frac{-\frac{2}{3}x - 1}{x^2 + 3x + 2}, \qquad t = \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}$$

Dabei gilt $dis\ t = dis\ (x - 1/2)(x + 3) = 0$ und somit ist t Bound für f. Wir haben also

$$\Delta^{-1} \frac{x}{x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{2}{3}x - 1}{x^2 + 3x + 2} + \Delta^{-1} \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}$$

1.9.2 Die Polygamma-Funktion

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß für einige rationalen Funktionen das Problem der indefiniten Summation keine rationale Lösung besitzt. Für solche Funktionen geben wir hier eine nicht-rationale Lösung der indefiniten Summation an, die auf die **Polygamma-Funktion** basiert. Diese Darstellung wurde von Moenck (s. [Mo]) vorgestellt.

Wir benötigen dazu die **Gamma-Funktion** $\Gamma(x)$. Diese ist eine Verallgemeinerung auf komplexe Zahlen der Fakultätsfunktion, welche für $\Re(z) > 0$ folgendermaßen definiert werden kann

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.18}$$

Man prüft leicht nach, daß die Gamma-Funktion folgender Gleichung genügt

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \tag{1.19}$$

und $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Somit gilt $\Gamma(z) = (z - 1)!$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen z.

Mit Hilfe der Gamma-Funktion definieren wir ferner die **Polygamma-Funktion** ψ_m für m positive ganze Zahl durch

$$\psi_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \log \Gamma(x + 1)$$

Für unsere Zwecke ist das Verhalten der Polygamma-Funktionen bezüglich des Differenzenoperators Δ wichtig. Wir haben

$$\begin{aligned}
\Delta\, \psi_m(x) &= \frac{d^m}{dx^m}\, \Delta\, \log \Gamma(x + 1) = \frac{d^m}{dx^m}\, \log \frac{\Gamma(x + 2)}{\Gamma(x + 1)} \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\, \log(x + 1) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\, \frac{1}{x + 1} \\
&= \frac{(-1)^{m-1}(m - 1)!}{(x + 1)^m}
\end{aligned}$$

Für die Beziehung $(\Gamma(x+2)/\Gamma(x+1)) = x+1$ wurde die Gleichung (1.19) verwendet. Die letzte Gleichung verwenden wir zur Lösung der indefiniten Summation von rationalen Funktionen der Form $a/(x-b)^m$ für komplexe a und b. Es gilt

$$\Delta^{-1} \frac{a}{(x-b)^m} = a\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\, \psi_m(x-b-1) \tag{1.20}$$

Betrachten wir jetzt das Problem der indefiniten Summation für eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$. Wir wissen aus früheren Überlegungen, daß Algorithmen uns folgende Zerlegung liefern

$$f = \Delta\, s + t \tag{1.21}$$

wobei $s,\, t \in \mathcal{K}(x)$ rationale Funktionen sind und $dis\ t = 0$. Wenn $t = t_1/t_2$ die reduzierte Darstellung von t ist, dann zerfällt t_2 über einer geeigneten algebraischen Erweiterung $\mathcal{L}$ des Grundkörpers $\mathcal{K}$. Wir haben also

$$t_2 = (x-\beta_1)^{j_1} \cdots (x-\beta_n)^{j_n}$$

für $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{L}$ und $j_1, \ldots, j_n$ positive ganze Zahlen. Durch Partialbruchzerlegung bekommen wir folgende Darstellung für t

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{j_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x-\beta_i)^j}$$

mit α_{ij} ebenfalls aus $\mathcal{L}$. Mit Hilfe von (1.20) haben wir für die indefinite Summation der rationalen Funktion f insgesamt

$$\Delta^{-1}\, f = s + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{j_i} \frac{\alpha_{ij}(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\, \psi_m(x-\beta_i-1)$$

Dabei ist es sehr wichtig, daß das Polynom t_2 in Linearfaktoren zerfällt. Das ist natürlich von der Seite der Implementierung ein schwieriges Hindernis.

Chapter 2

Der Algorithmus von Abramow [71]

In diesem Kapitel wird ein Algorithmus vorgestellt, der von Abramow stammt (s. [A71]). Dieses Verfahren liefert eine rationale Lösung des Problems (IRS) , falls eine solche existiert.

Auch diese Methode führt die Bestimmung der indefiniten Summation einer rationalen Funktion i. w. auf die Lösung einer Differenzengleichung einer ähnlichen Form wie im Algorithmus von Gosper zurück. Andererseits werden wir unten feststellen, daß der Weg zur Aufstellung dieser Gleichung deutlich verschieden von dem von Gosper ist.

Ferner ist es beim Algorithmus von Abramow sehr leicht, eine Gradschranke für das Lösungspolynom der Differenzengleichung zu bestimmen.

In den nächsten Abschnitten werden wir das Verfahren beschreiben und als Algorithmus darstellen. Dabei werden wir die Zusammenhänge deutlich machen, die in Bezug auf die eingeführten Begriffe der Shift-Saturated Extension und Form bestehen. Im letzten Abschnitt werden einige Aspekte der vorgenommenen Implementierung im Computer-Algebra-System Axiom besprochen.

2.1 Das Verfahren

Nehmen wir an, daß für die rationalen Funktionen $g, f \in \mathcal{K}(x)$ mit reduzierten Darstellungen

$$g = \frac{g_1}{g_2} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{f_1}{f_2}$$

folgende Gleichung gilt

$$\Delta g = f$$

Die Funktion g soll also Lösung des Problems (IRS) für f sein.

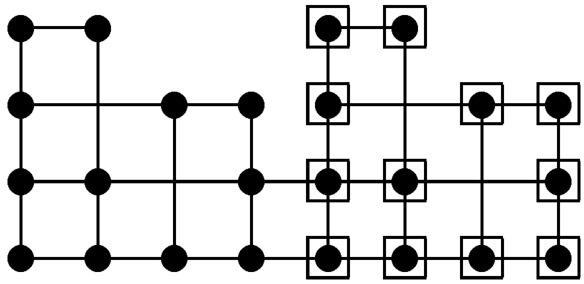
Bestimmen wir zuerst das Polynom $g_2 \in \mathcal{K}[x]$. Sei $\alpha = dis\ f > 0$ und betrachten wir die Summe

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} E^i f = E^\alpha g - g = \frac{g_2 E^\alpha g_1 - g_1 E^\alpha g_2}{g_2 E^\alpha g_2}$$

Aus Satz 1.1 wissen wir, daß $dis\ g = \alpha - 1$, also sind $E^\alpha g_2$ und g_2 teilerfremd und somit ist die rechte Seite der Gleichung bereits reduziert. Wenn wir eine reduzierte Darstellung berechnen

$$\frac{s}{t} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} E^i f$$

dann gilt $t = g_2 E^\alpha g_2$ bis auf einen konstanten Faktor. Betrachten wir die graphische Darstellung der Shift-Struktur des Polynoms $g_2 E^\alpha g_2$. Da g_2 und $E^\alpha g_2$ teilerfremd sind, entsteht der gewünschte Graph einfach aus dem Aufeinanderlegen des Graphen von g_2 und desselben, um α Spalten versetzt. Wir haben für $g_2 E^\alpha g_2$ etwa folgende Form



wobei die Punkten aus dem Beitrag von $E^\alpha g_2$ ausgezeichnet wurden.

Aus der Struktur des Graphen sieht man sofort, daß der Graph zu $E^\alpha g_2$ durch $gcd(g_2 E^\alpha g_2, E^\alpha(g_2 E^\alpha g_2))$ zu bestimmen ist, denn dadurch werden nur die letzten α Spalten erhalten. Damit ist klar, daß die Bestimmung von $g_2 = t/E^\alpha g_2$ der Bestimmung des Zählers einer reduzierten Darstellung von $t/E^\alpha t$ entspricht, wie das Verfahren vorsieht.

Aus

$$\frac{t}{E^\alpha t} = \frac{g_2}{E^{2\alpha} g_2}$$

können wir nämlich g_2 bestimmen, da die rechte Seite der Gleichung schon reduziert ist.

Wenn wir g_2 berechnet haben, kann g_1 durch die Lösung folgender Differenzen-Gleichung bestimmt werden, die direkt aus $\Delta g = f$ folgt:

$$g_2 E g_1 - g_1 E g_2 = f g_2 E g_2 \tag{2.1}$$

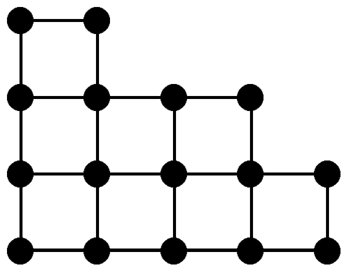
Diese Gleichung entspricht einem linearen Gleichungssystem mit den Koeffizienten von g_1 als Unbekannten. Falls dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt, dann existiert keine rationale Funktion g als Lösung der indefiniten Summation für f.

Wenn wir die oben beschriebenen Überlegungen mit Hilfe des Begriffs der Shift-Saturated Extension nochmals ausdrücken, dann stellen wir fest, daß diese Methode dem Inhalt vom Satz 1.5 entspricht.

Betrachten wir die Shift-Saturated Form

$$f = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{und} \qquad g = \frac{\gamma}{\delta}$$

der rationalen Funktionen f und g. Sei β beispielweise folgendermaßen dargestellt.



Aus ähnlichen Überlegungen wie im Beweis zum Satz 1.5 und aus Lemma 1.3 wissen wir, daß die Rechte Seite der Gleichung

$$Ef + f = \frac{\frac{\beta}{B}E\alpha + \alpha E\frac{E\beta}{B}}{lcm\,(\beta, E\beta)}$$

mit $B = gcd\,(\beta, E\beta)$ bereits eine Shift-Saturated Form der rationalen Funktion ist.

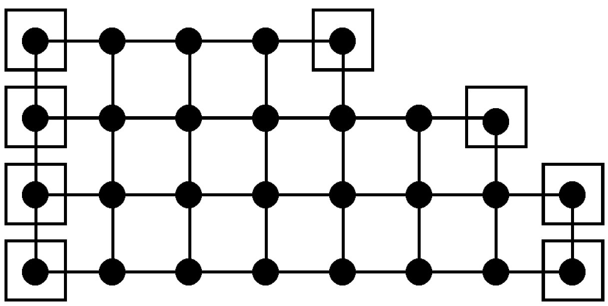
Wenn dann

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} E^i f = \frac{s}{t}$$

in reduzierter Darstellung ist, dann folgt daraus, daß

$$ShiftSat(t) = lcm\,(\beta, E\beta, \ldots, E^{\alpha-1}\beta)$$

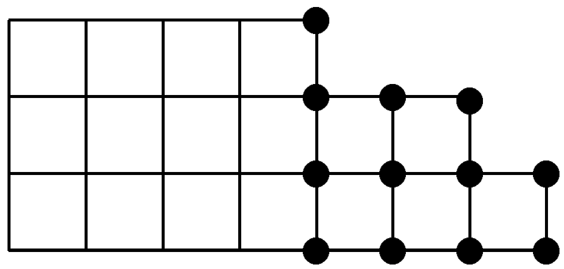
In unserem Beispiel gilt $\alpha = dis\ f = 4$ und für die Shift-Saturated Extension von t bekommen wir folgende graphische Darstellung.



Da β schon Shift-Saturated Extension ist, ist $ShiftSat(t)$ schon durch die rechten und die linken Endpunkten jeder Zeile des obigen Graphen (also jeder Shift-Äquivalenzklasse) eindeutig bestimmt. Diese Punkte sind in der letzten Abbildung ausgezeichnet. Diese Information kann auch nur aus β und $E^{\alpha-1}\beta$ gewonnen werden, denn wir haben

$$ShiftSat(g_2 E^\alpha g_2) = lcm\,(\beta, E\beta, \ldots, E^{\alpha-1}\beta) = ShiftSat(lcm\,(\beta, E^{\alpha-1}\beta))$$

Aus der Tatsache, daß g_2 und $E^\alpha g_2$ teilerfremd sind, und daß $dis\ g_2 = \alpha - 1$ folgt, daß der Graph von $ShiftSat(E^\alpha g_2)$ einfach aus dem Graphen von $ShiftSat(g_2 E^\alpha g_2)$ durch Löschen der ersten α Spalten entsteht.



Dies zieht nach sich

$$\begin{aligned}
E^\alpha \delta &= ShiftSat(E^\alpha g_2) \\
&= gcd\,(ShiftSat(t), E^\alpha ShiftSat(t)) \\
&= gcd\,(ShiftSat(lcm\,(\beta, E^{\alpha-1}\beta)), ShiftSat(lcm\,(E^\alpha\beta, E^{2\alpha-1}\beta))) \\
&= gcd\,(E^{\alpha-1}\beta, E^\alpha\beta)
\end{aligned}$$

und somit

$$\delta = gcd\,(E^{-1}\beta, \beta)$$

Diese Berechnungsvorschrift für δ entspricht aber genau dem Satz 1.5. Auch die aufgebaute Differenzengleichung entspricht direkt der Gleichung im Satz 1.5, wenn man sie mit Hilfe der Shift-Saturated Form ausdrückt.

2.2 Gradschranke

Im letzten Abschnitt wurde das Polynom $g_2 \in \mathcal{K}\,[x]$ berechnet. Um eine Lösung des Problems (IRS) in der Form $g = g_1/g_2$ zu bestimmen, soll die Differenzengleichung (2.1) untersucht werden. Dafür ist eine Gradschranke für das gesuchte Polynom g_1 anzugeben.

Nehmen wir jetzt an, wir hätten g_1 schon bestimmt. Es gelte also

$$\begin{aligned} g_1 &= a_n x^n + \ldots + a_0 \\ g_2 &= b_m x^m + \ldots + b_0 \end{aligned}$$

mit $a_n \neq 0, n \geq 0$, und ferner für $p = fg_2Eg_2$

$$g_2Eg_1 - g_1Eg_2 = p \tag{2.2}$$

Wir wissen, daß der $(n+m)$-te Koeffizient der linken Seite Null ist. Wegen

$$Eg_1 = \sum_{i=0}^{n} a_i(x+1)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} a_i \right) x^j$$

kann man leicht nachrechnen, daß der $(n+m-1)$-te Koeffizient der linken Seite von (2.2) den Wert

$$b_m(a_{n-1} + na_n) + b_{m-1}a_n - a_n(b_{m-1} + mb_m) - a_{n-1}b_m = (n-m)a_nb_m$$

annimmt. Es gibt also nur zwei Möglichkeiten:

1. $m \neq n$. Das bedeutet, daß $deg\, p = n + m - 1$, also daß $n = deg\,(p) - m + 1$.

2. $m = n$. In diesem Falle muß $deg\, p < n + m - 1$ gelten.

In der Tat gilt aber, daß nur die erste Möglichkeit berücksichtigt werden soll. Denn nehmen wir an, $g = g_1/g_2$ sei eine Lösung der Gleichung (2.1) und es gelte $deg\, g_1 = deg\, g_2$. Dann können wir g_1 darstellen als

$$g_1 = c \cdot g_2 + r$$

mit $c \in \mathcal{K}$ und $deg\, r < deg\, g_2$. Wenn wir in (2.1) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= g_2E(c \cdot g_2 + r) - (c \cdot g_2 + r)Eg_2 \\ &= c \cdot g_2Eg_2 + g_2Er - c \cdot g_2Eg_2 - rEg_2 \\ &= g_2Er - rEg_2. \end{aligned}$$

Somit ist auch r eine Lösung für (2.1). Wir können also den Grad n des gesuchten Polynoms g_1 nicht nur abschätzen, sondern genau angeben.

2.3 Der Algorithmus

In diesem Abschnitt beschreiben wir einen Algorithmus, der das Problem (IRS) löst.

Als Eingabe verlangt der Algorithmus eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$, gegeben durch eine reduzierte Darstellung f_1/f_2. Als Ausgabe liefert der Algorithmus die Aussage, ob eine rationale Funktion $g = g_1/g_2$ aus $\mathcal{K}(x)$ existiert, für die gilt

$$\Delta g = Eg - g = f.$$

Der Algorithmus berechnet auch ein solches g, falls es existiert.

Algorithmus 2.1 *(Zur Lösung der indefiniten Summation)*

Input: $f \in \mathcal{K}(x)$.
Output: $g \in \mathcal{K}(x)$ *so, daß* $\Delta\, g = f$, *falls* g *existiert.*
  Berechne $h \leftarrow dis f$
  Falls $h = 0$, *dann*
    Gib „$\sum f(x)\,\delta x$ *enthält keine rationale Funktion“ aus*
  Berechne $t \leftarrow \operatorname{denom}(E^0 + E + \ldots + E^{h-1})f$
  Berechne $g_2 \leftarrow \operatorname{numer} t/E^h t$
  Berechne g_1 *aus* $g_2 E g_1 - g_1 E g_2 = f g_2 E g_2$
  Falls g_1 *nicht existiert, dann*
    Gib „$\sum f(x)\,\delta x$ *enthält keine rationale Funktion“ aus*
  Gib $g = g_1/g_2$ *als Ergebnis zurück*

Dabei sind die aufwendigsten Operationen die Berechnung von *dis* f und die Lösung der Differenzengleichung.

2.4 Beispiele

Wir wenden jetzt den Algorithmus auf einige Beispiele an, wobei die Berechnungen mit Hilfe des Computer-Algebra Systems Axiom durchgeführt wurden.

Für $\mathcal{K} = \mathbb{Q}$ betrachten wir die rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ gegeben durch die reduzierte Darstellung

$$f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2}$$

Dann gilt

$$Res(f_2, E^h f_2) = \\ h^{16} - 36h^{14} + 470h^{12} - 2772h^{10} + 7409h^8 - 8208h^6 + 3136h^4$$

Daraus folgt

$$dis\ f = 1$$

Der nächste Schritt im Algorithmus liefert

$$t = \text{denom}\ f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$$

und damit

$$g_2 = \text{numer}\ \frac{t}{Et} = \text{numer}\ \frac{x^2 - 2}{x^2 + 4x + 2} = x^2 - 2$$

Beim Aufstellen der Gleichung (2.1) bemerken wir, daß $p = -x^2 - 3x - 3$. Wir können also annehmen, daß $deg\, g_1 = 1$ und erhalten für $g_1 = ax + b$ die Gleichung

$$-ax^2 - (a + 2b)x - (2a + b) = -x^2 - 3x - 3$$

die für die Werte $a = 1$ und $b = 1$ erfüllt ist. Damit haben wir das gewünschte Polynom g_1 gefunden:

$$g_1 = x + 1$$

und somit die Lösung des Problems

$$g = \frac{x + 1}{x^2 - 2}$$

Man kann in der Tat leicht nachprüfen, daß $\Delta g = f$

Betrachten wir in $\mathcal{K}(x)$ für $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(n)$ die Funktion

$$f = \frac{1}{x^2 + n^2 - 3x + 3n - 2nx + 2}$$

Wir möchten einen rationalen Ausdruck für

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

bestimmen. Wie gewohnt, berechnen wir zuerst $dis\ f$. Mit $f_2 = x^2 + n^2 - 3x + 3n - 2nx + 2$ haben wir

$$Res(f_2, Ef_2) = h^2(h^2 - 1)$$

und

$$dis\ f = 1$$

Das ergibt

$$t = \text{denom } f = x^2 + n^2 - 3x + 3n - 2nx + 2$$

und

$$g_2 = \text{numer } \frac{t}{Et} = \text{numer } \frac{x-n-2}{x-n} = x - n - 2$$

und $p = 1$.

Somit ist $deg\, g_1 = 0$. Dies liefert $g_1 = -1$.

Die rationale Funktion

$$g = -\frac{1}{x-n-2}$$

erfüllt dann die Gleichung $\Delta g = f$ und wir können schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = g(n+1) - g(0) = \frac{n}{n+1}$$

Betrachten wir in $\mathbb{Q}(x)$ die Funktion

$$f = \frac{2}{x(x+2)}$$

Wieder möchten wir einen rationalen Ausdruck für

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

bestimmen. In diesem Falle ist offensichtlich, daß

$$dis\ f = 2$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} t &= \text{denom } (f + Ef) = \\ &= \text{denom } \frac{4x^2 + 12x + 6}{x(x+2)(x+1)(x+3)} = x(x+1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_2 &= \text{numer } \frac{t}{E^2 t} \\ &= \text{numer } \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} = x(x+1) \end{aligned}$$

Damit gilt $p = 2x^2 + 4 + 2$ also $deg\, g_1 = 1$. Als Lösung der Gleichung (2.1) erhalten wir

$$g_1 = -2x - 1$$

Die rationale Funktion

$$g = -\frac{2x+1}{x^2+x}$$

erfüllt dann die Gleichung $\Delta g = f$ und wir haben den gesuchten Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = g(n+1) - g(0) = \frac{n(3n+5)}{2(n+2)(n+1)}$$

2.5 Die Implementierung

Der oben beschriebene Algorithmus von Abramow wurde im System Axiom implementiert. Es wurde ein Package definiert, genannt `AbramowSum` oder `ASUM`, das folgende Funktion enthält

`abrsumrat`

Diese Funktion nimmt als Parameter multivariate rationale Funktionen an, wobei die Variable angegeben werden muß, nach welcher aufsummiert werden soll.

Das Ergebnis ist dann eine rationale Funktion, die Lösung der indefiniten Summation ist, oder die Meldung "failed", falls keine solche Lösung existiert.

Beispiel: Wir berechnen die indefinite Summation für das oben angegebene Beispiel

$$f = \frac{1}{x^2+n^2-3x+3n-2nx+2}$$

Das geschieht durch folgende Aufrufe im System

```
f:FRAC SMP(FRAC INT, SYMBOL) = 1/(x**2+n**2-3*x+3*n-2*n*x+2)
```

(1) $$\frac{1}{x^2+(-2\ n-3)\ x+n^2+3\ n+2}$$

`Type: FRAC SMP(FRAC INT, SYMBOL)`

```
abrsumrat(f,x)
```

(2) $$-\frac{1}{x-n-2}$$

`Type: Union ("failed", FRAC SMP(FRAC INT, SYMBOL))`

Für die Lösung g_1 der Differenzengleichung wurde eine rekursive Methode implementiert, die von Abramow vorgeschlagen wird.

Wir verwenden wieder die Notation aus dem Abschnitt über die Gradschranke für g_1. Nach der Berechnung von g_2 bestimmen wir den Grad n des Polynoms

g_1. Aus den früheren Überlegungen können wir den Leitkoeffizienten a_n berechnen durch

$$a_n = \frac{\langle x^{m+n-1}\rangle p}{(n-m)b_m}$$

denn wir können annehmen, daß $n \neq m$. Wenn wir g_1 darstellen als

$$g_1 = a_n x^n + g_1'$$

mit $deg\, g_1' < n$, dann bekommen wir aus der Gleichung (2.2) die neue Gleichung

$$g_2 E g_1' - g_1' E g_2 = p - a_n(x+1)^n g_2 + a_n x^n E g_2.$$

Sei p' das Polynom in der rechten Seite, dann gilt $deg\, p' < deg\, p$. Wir haben wieder eine Gleichung der Form (2.1) und können somit rekursiv vorgehen. Die Lösung der Gleichung für g_1 konstant aus dem Körper erfolgt direkt. An dieser Stelle kann man auch feststellen, ob ein solches g_1 als Lösung von (2.1) existiert (a_0 sollte eine Konstante aus dem Körper sein).

Chapter 3

Der Algorithmus von Gosper

In diesem Kapitel wird der Algorithmus von Gosper (s. [Go]) kurz vorgestellt, der eine rationale Lösung der indefiniten Summation für eine beliebige rationale Funktion liefert, falls diese existiert. Für eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus weisen wir auf [Go], [Pe2] und [Ho] hin.

Das Verfahren ist allgemein auf hypergeometrische Funktionen f anwendbar, denn es wird nur $f/E^{-1}f$ als rational vorausgesetzt. Dabei spielt eine besondere Darstellung dieser rationalen Funktion eine wichtige Rolle. Diese eindeutige Zerlegung wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Aus der Betrachtung von $f/E^{-1}f$ werden wir dann das Problem auf die Lösung einer polynomialen Differenzengleichung (der sogenannten **key-equation**) und somit auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit polynomialen Einträgen zurückführen.

Wir werden feststellen, daß diese Methode in engem Zusammenhang mit der Aussage des Satzes 1.5 steht.

3.1 Das Verfahren

Sei $h \in \mathcal{K}(x)$ eine rationale Funktion. Wir suchen $s \in \mathcal{K}(x)$ so, daß

$$\Delta s = Es - s = h \tag{3.1}$$

gilt. Wir betrachten zuerst die rationale Funktion

$$f = \frac{h}{E^{-1}h} = \frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{K}(x)$$

wobei f_1/f_2 reduziert ist. Wir berechnen eine **Gosper-Zerlegung** von f. Diese besondere Darstellung hat die Form

$$f = \frac{p}{E^{-1}p}\,\frac{q}{r} \tag{3.2}$$

wobei gelten soll:

1. p, q und r sind Polynome aus $\mathcal{K}[x]$.
2. q und r sind **shift-free**, d.h. für alle nichtnegativen ganzzahligen Werte von j gilt $gcd(q, E^j r) = 1$.

Solch eine Zerlegung kann berechnet werden. Weiter unten geben wir eine Methode zur Berechnung an.

Wenn wir ferner annehmen, daß $gcd(p, r) = 1$ und $gcd(E^{-1}p, q) = 1$, dann ist diese Zerlegung bis auf konstante Faktoren eindeutig (s. [Pe2]).

Gosper beweist, daß die Lösung der indefiniten Summation s folgende Form besitzt:

$$s = \frac{q}{E^{-1}p}(E^{-1}h)(E^{-1}t) \tag{3.3}$$

Das Polynom $t \in \mathcal{K}[x]$ ist dabei eine Lösung der Gleichung

$$p = (Eq)t - r(E^{-1}t) \tag{3.4}$$

die auch key-equation genannt wird.

Das Verfahren berechnet also zuerst die Komponenten p, q und r der Gosper-Zerlegung der Funktion $h/E^{-1}h$ und löst dann die key-equation (3.4) nach dem Polynom t. Die indefinite Summation der Funktion h ist genau dann rational, wenn solch ein Polynom t existiert.

Betrachten wir jetzt das Verfahren mit Hilfe der eingeführten Begriffe über die Shift-Struktur von Polynomen.

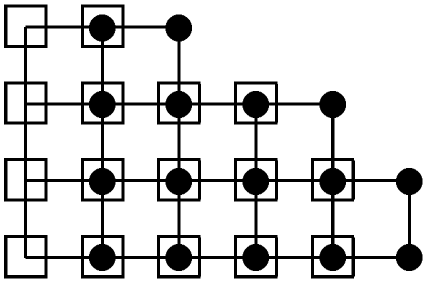
Sei also die Shift-Saturated Form der Funktionen h und s gegeben als

$$h = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{und} \qquad s = \frac{\gamma}{\delta}$$

dann gilt

$$\frac{h}{E^{-1}h} = \frac{\alpha}{E^{-1}\alpha}\,\frac{E^{-1}\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{E^{-1}\alpha}\,\frac{\frac{E^{-1}\beta}{\beta_0}}{\frac{\beta}{\beta_0}}$$

wobei $\beta_0 = gcd(\beta, E^{-1}\beta)$. Stellen wir die Shift-Struktur des Polynoms β zur Veranschaulichung folgendermaßen dar.



In dem Graphen wurden die Punkte, welche zu $E^{-1}\beta$ gehören, durch Quadrate ausgezeichnet. Der Durchschnitt beider Graphen ergibt dann den Graphen zu β_0.

Wenn also $\beta = [\beta_1]^{\underline{1}}[\beta_2]^{\underline{2}}\cdots[\beta_n]^{\underline{n}}$, dann gilt

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n \qquad \text{und} \qquad \frac{E^{-1}\beta}{\beta_0} = (E^{-1}\beta_1)(E^{-2}\beta_2)\cdots(E^{-n}\beta_n)$$

In β/β_0 sind alle rechten Endpunkte enthalten, während in $E^{-1}\beta/\beta_0$ die linken Endpunkte auftreten. Es ist dann offensichtlich, daß durch Verschieben des Graphen zu β/β_0 nie gemeinsame Punkte mit $E^{-1}\beta/\beta_0$ auftreten können. Somit gilt

$$gcd\,(\frac{E^{-1}\beta}{\beta_0}, E^k\frac{\beta}{\beta_0}) = 1$$

für alle nichtnegativen ganzzahligen k.

Daraus folgt, daß durch

$$p = \alpha,\; q = \frac{E^{-1}\beta}{\beta_0} \quad \text{und} \quad r = \frac{\beta}{\beta_0}$$

eine Gosper-Zerlegung von f berechnet wird. Wenn wir in (3.3) einsetzen, dann erhalten wir

$$s = \frac{1}{\beta_0}\,\frac{E^{-1}\beta}{E^{-1}\alpha}\,(E^{-1}h)(E^{-1}t) = \frac{E^{-1}t}{\beta_0}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist schon in Shift-Saturated Form, da β_0 schon Shift-Saturated Extension ist. Dies bedeutet, daß $\gamma = E^{-1}t$ und $\delta = \beta_0 = gcd\,(\beta, E^{-1}\beta)$, wie im Satz 1.5.

Die key-equation hat dann die Form

$$\alpha = \frac{\beta}{E\beta_0}\,t - \frac{\beta}{\beta_0}\,E^{-1}t = \frac{\beta}{E\delta}\,E\gamma - \frac{\beta}{\delta}\,\gamma$$

Der Algorithmus von Gosper liefert also die Lösung s der indefiniten Summation in gleicher Form wie im Satz 1.5 angegeben.

Es ist interessant zu bemerken, daß die Aufstellung der key-equation (3.4) „experimentell“ erfolgt ist. Gosper hat zahlreiche Beispiele mit Hilfe des Computer-Algebra Systems MACSYMA berechnet und ist dadurch auf diese Vermutung gekommen. Für eine ausführliche Ableitung der key-equation weisen wir auf Paule (s. [Pa91, Ho]) hin.

3.2 Gradschranke

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß durch die Methode von Gosper das Problem der indefiniten Summation auf die Bestimmung der Gosper-Zerlegung (3.2) und die Lösung der Gleichung (3.4) reduziert wurde.

Eine Methode zur Lösung der Differenzengleichung basiert auf Koeffizientenvergleich. Dafür ist eine Schranke für den Grad des gesuchten Polynoms notwendig. Wir geben hier eine solche Gradschranke an, ohne sie näher zu erläutern, da eine genauere Betrachtung in der angegebenen Literatur zu finden ist.

Seien $d_1 = deg\,(Eq - r)$, $d_2 = deg\,(Eq + r)$ und

$$d_0 = -2\frac{\langle x^{d_2-1}\rangle(Eq - r)}{\langle x^{d_2}\rangle(Eq + r)}$$

dann gilt für die Gradschranke d des gesuchten Polynoms t:

$$d = \begin{cases} deg\,(p) - d_1 & , \text{ falls } d_1 \geq d_2 \\ \max(d_0, deg\,(p) - d_2 + 1) & , \text{ falls } d_1 < d_2 \quad \text{und} \quad d_0 \quad \text{ganzzahlig} \\ deg\,(p) - d_2 + 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Für eine Verbesserung dieser Schranke im Falle von rationalen Funktionen siehe auch [LPS].

3.3 Der Algorithmus

In diesem Abschnitt stellen wir das Verfahren von Gosper als Algorithmus dar.

Als Eingabe wird eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}\,(x)$ verlangt. Falls es eine rationale Lösung der indefiniten Summation für f gibt, dann berechnet der Algorithmus solch ein $g \in \mathcal{K}\,(x)$ so, daß

$$\Delta\, g = f$$

Falls kein solches g existiert, liefert der Algorithmus eine entsprechende Meldung.

Algorithmus 3.1 *(Zur Lösung der indefiniten Summation)*

Input: $f \in \mathcal{K}(x)$.
Output: $g \in \mathcal{K}(x)$ *so, daß* $\Delta\, g = f$, *falls* g *existiert.*
Berechne eine Gosper-Zerlegung p, q, r *für* $f/E^{-1}f$.
Berechne t *aus* $p = (Eq)t - r(E^{-1}t)$.
Falls t *nicht existiert*
dann gib „$\sum f(x)\,\delta x$ *enthält keine rationale Funktion“ aus.*
Gib $q(E^{-1}f)(E^{-1}t)/(E^{-1}p)$ *als Lösung zurück.*

3.4 Beispiele

Wir wenden jetzt den Algorithmus von Gosper auf einige rationale Funktionen an.

Betrachten wir die rationale Funktion $h = h_1/h_2 \in \mathbb{Q}(x)$ gegeben durch

$$h = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2}$$

Da $h_2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2x - 1)$ die vollständige Zerlegung von h_2 über $\mathbb{Q}$ ist, gilt auch

$$ShiftSat(h_2) = [x^2 + 2x - 1]^{\underline{2}}$$

und somit ist

$$h = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-x^2 - 3x - 3}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{2}}}$$

die Shift-Saturated Form von h. Daraus können wir nach den früheren Überlegungen eine Gosper-Zerlegung von h

$$h = \frac{p}{E^{-1}p}\,\frac{q}{r}$$

berechnen durch

$$p = \alpha = -x^2 - 3x - 3, \quad q = \frac{E^{-1}\beta}{\beta_0} = x^2 - 2x - 1$$

und

$$r = \frac{\beta}{\beta_0} = x^2 + 2x - 1$$

wobei $\beta_0 = gcd\,(\beta, E^{-1}\beta) = x^2 - 2$.

Zu lösen ist die Gleichung (3.4) nach t. Es gilt

$$d_1 = deg\,(Eq - r) = 1 \qquad \text{und} \qquad d_2 = deg\,(Eq + r) = 2$$

Mit $d_0 = 2$ haben wir also für die Gradschranke d des gesuchten Polynoms t

$$d = \max(d_0, deg\,(p) - d_2 + 1) = \max(2, -1) = 2$$

Wir können jetzt durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung (3.4) das Polynom t bestimmen. Wir setzen etwa

$$t = t_0 + t_1 x + t_2 x^2$$

in (3.4) ein und bekommen eine Lösung

$$t = 2 + x$$

Für die Lösung $s \in \mathbb{Q}(x)$ der indefiniten Summation erhalten wir somit

$$s = \frac{q}{E^{-1}p}(E^{-1}h)(E^{-1}t) = \frac{x+1}{x^2-2}$$

Man kann leicht nachprüfen, daß $\Delta\, s = h$.

Betrachten wir jetzt folgende Funktion $h \in \mathbb{Q}(x)$

$$h = \frac{h_1}{h_2} = \frac{-3x-5}{x^5 + \frac{23}{3}x^4 + \frac{199}{9}x^3 + \frac{793}{27}x^2 + \frac{1400}{81}x + \frac{784}{243}}$$

Die Shift-Saturated Form von h sieht dann folgendermaßen aus

$$h = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(-3x-5)(x+\frac{1}{3})}{[(x+\frac{7}{3})^2]^{\underline{3}}}$$

da $h_2 = (x+1/3)(x+4/3)^2(x+7/3)^2$ gilt. Für die Gosper-Zerlegung von h haben wir dann

$$p = (-3x-5)(x+\frac{1}{3}), \qquad q = (x-\frac{2}{3})^2 \qquad \text{und} \qquad r = (x+\frac{7}{3})^2$$

und wir können wieder die key-equation des Gosper-Algorithmus aufstellen. Für die Gradschranke bekommen wir $d = 4$, denn

$$d_1 = deg\,(Eq - r) = 1, \quad d_2 = deg\,(Eq + r) = 2 \qquad \text{und} \qquad d_0 = 4$$

Durch einsetzen in die key-equation wird als Lösung folgendes Polynom berechnet

$$t = x + \frac{4}{3}$$

Wir können also schreiben

$$s = \Delta^{-1}h = \frac{q}{E^{-1}p}(E^{-1}h)(E^{-1}t) = \frac{27}{(3x+1)(3x+4)^2}$$

Chapter 4

Der Algorithmus von Abramow [75]

Hier wird ein weiterer Algorithmus beschrieben, der von Abramow (s. [A75]) vorgestellt wurde. Dieser Algorithmus löst das Problem (IRSB) für rationale Funktionen $f \in \mathcal{K}(x)$, d.h. er bestimmt rationale Funktionen s und t aus $\mathcal{K}(x)$ mit der Eigenschaft

$$f = \Delta\, s + t$$

und t ist Bound für f.

Durch die Verwendung der Shift-Saturated Form der rationalen Funktion und der graphischen Darstellung ihrer Shift-Struktur ist es möglich, eine anschauliche Begründung für das Verfahren anzugeben.

Abramow führt den Begriff Bound ein, um eine gewisse Minimalität des Restes zu fordern. Andererseit zeigt sich, daß in einigen Fällen das Nenner-Polynom des berechneten rationalen Teils s auffällig hohe Werte annimmt.

Wir erweitern den Algorithmus durch eine Beobachtung, um ein solches Verhalten zu vermeiden.

4.1 Das Verfahren

Sei $f \in \mathcal{K}(x)$ eine gegebene rationale Funktion. Wir lösen das Problem (IRSB) für f, d.h. wir finden eine Zerlegung

$$f = \Delta\, s + t \tag{4.1}$$

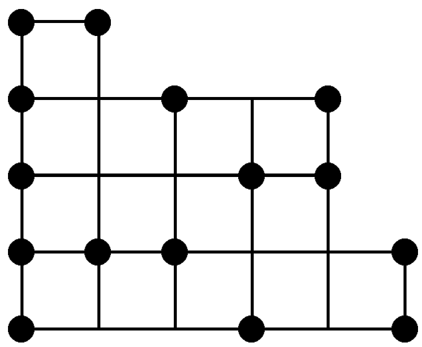
wobei s und t rationale Funktionen aus $\mathcal{K}(x)$ sind und t ist Bound für f. Wie wir aus dem Satz 1.9 wissen, entspricht dies der Bestimmung einer solchen Zerlegung mit $dis\; t = 0$.

Wir gehen iterativ vor und bestimmen zuerst eine Zerlegung der Form

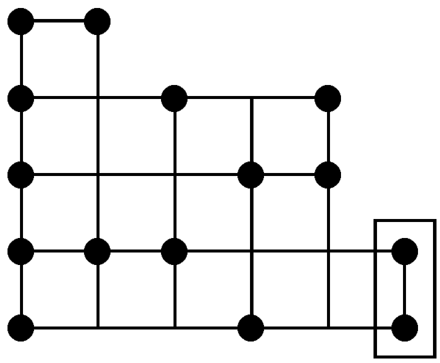
$$f = \Delta\, u + r \tag{4.2}$$

wobei u und r rationale Funktionen aus $\mathcal{K}\,(x)$ sind und $dis\ r < dis\ f$ oder $r = 0$.

Zur Veranschaulichung nehmen wir ferner an, für die reduzierte Darstellung $f = p/q$ der rationalen Funktion wäre die Shift-Struktur von q bekannt. Sei also $ShiftGraph(q)$ beispielsweise gegeben durch



Um durch eine Zerlegung eine kleinere Dispersion zu bekommen betrachten wir die rechten Endpunkte der Shift-Klasse maximaler Länge in $ShiftGraph(q)$. In unserem Beispiel sind diese die ausgezeichneten Punkte in folgender Abbildung.



Der Beitrag v dieser Punkte zum Polynom q kann berechnet werden. Dazu benötigen wir den Wert der Dispersion von q, etwa $k = dis\ q$. Somit erhalten wir eine Zerlegung $q = v \cdot w$ mit

$$v = part(gcd\,(E^k q, q), q) \qquad \text{und} \qquad w = \frac{q}{v}$$

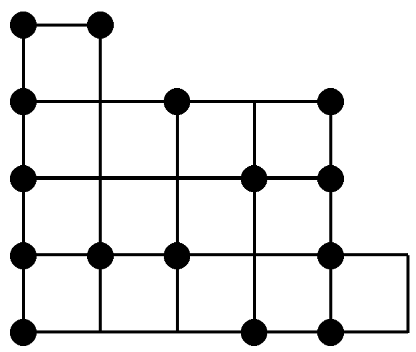
Da offensichtlich v und w teilerfremd sind, existieren Polynome a und b aus $\mathcal{K}\,[x]$, für welche gilt:

$$f = \frac{p}{q} = \frac{a}{v} + \frac{b}{w}$$

Wir setzen $u = E^{-1}\dfrac{a}{v}$ und erhalten folgenden Rest

$$r = f - \Delta\, u = \frac{b}{w} + E^{-1}\frac{a}{v} = \frac{b(E^{-1}v) + w(E^{-1}a)}{w(E^{-1}v)}$$

wobei die rechte Seite nicht reduziert sein muß. Auf alle Fälle ist der Graph zum Nenner-Polynom von r ein Teilgraph von $ShiftGraph(w(E^{-1}v))$.

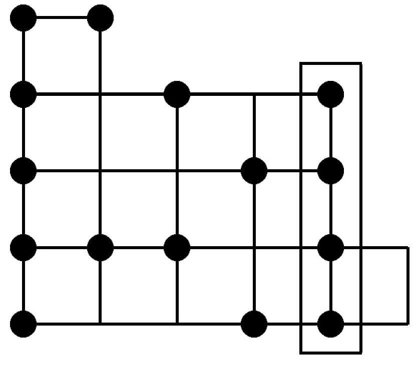


Aus der Shift-Struktur von v und w sieht man sofort, daß $dis\ w(E^{-1}v) < dis\ vw = dis\ q$. Es gilt also für die gefundene Zerlegung $f = \Delta\, u + r$, daß

$$dis\ r < dis\ f$$

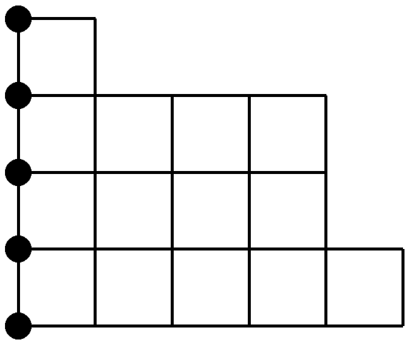
Wir wenden jetzt das Verfahren iterativ auf den berechneten Rest r an, bis wir einen Rest $r' \neq 0$ mit Dispersion Null bekommen, oder $r' = 0$. Im ersten Falle besitzt die Funktion f keine rationale Lösung der indefiniten Summation und r ist Bound für f.

In unserem Beispiel würde der nächste Schritt folgendermaßen aussehen: In dem Graphen wurden die Punkte ausgezeichnet, deren „Entfernung“ die Dispersion des Restes verringern würde.



Durch Iteration liefert uns dieses Verfahren immer eine Zerlegung der Form (4.1).

Zusammenfassend besteht also das Verfahren im wesentlichen darin, die am weitesten liegenden rechten Endpunkten im Graphen $ShiftGraph(q)$ schrittweise zu entfernen. Für die Struktur des berechneten Bounds t heißt das, daß das Nenner-Polynom nur höchstens diejenigen Punkte enthalten kann, welche als linke Endpunkte im Graphen von q auftreten.



Wir bekommen somit eine Zerlegung der Form

$$f = \Delta \frac{\rho}{[E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}} \cdots [E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\sigma}{\beta_1 (E^{-1}\beta_2) \cdots (E^{-n+1}\beta_n)}$$

wobei $ShiftSat(q) = [\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}$ die Shift-Saturated Form vom Nenner-Polynom der rationalen Funktion f ist.

4.2 Der Algorithmus

In diesem Abschnitt geben wir das oben beschriebene Verfahren als Algorithmus an.

Der Algorithmus liefert für jede rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ eine Lösung des Problems (IRSB) , d.h. rationale Funktionen s und t aus $\mathcal{K}(x)$ werden so bestimmt, daß

$$f = \Delta\, s + t$$

mit $dis\ t = 0$ gilt.

Algorithmus 4.1 *(Zur Berechnung einer Lösung des Problems (IRSB))*

Input: $f \in \mathcal{K}(x)$.
Output: $s, t \in \mathcal{K}(x)$ *mit* $f = \Delta\, s + t$ *und* $dis\ t = 0$.
Bestimme $k \leftarrow dis\ q$.
Setze $u \leftarrow 0$ *und* $r \leftarrow f (= p/q)$.
Wiederhole für $i = k, k-1, \ldots, 1$ *und* $r \neq 0$.
Berechne $v \leftarrow part(gcd(E^i q, q), q)$ *und* $w \leftarrow q/v$.

Berechne die Zerlegung $r = a/v + b/w$.
Setze $u \leftarrow u + E^{-1}(a/v)$ und $r \leftarrow r - \Delta\, u (= p/q)$.
Gib u und r als Ergebnis zurück.

4.3 Die Erweiterung

Der Algorithmus von Abramow liefert ein Bound t für jede rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$. Nach Definition hat das Nenner-Polynom von t minimalen Grad.

Wir wissen aber, daß t nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn man zu verschiedenen Bound für f den dazugehörigen rationalen Teil s betrachtet, so stellt man fest, daß der Grad des Nenner-Polynoms sehr unterschiedliche Werte annimmt.

Betrachten wir z. B. folgende rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ für $\mathcal{K} = \mathbb{Q}$

$$f = \frac{p}{q} = \frac{1}{x(x+3)^2(x^2+1)} \tag{4.3}$$

Man rechnet leicht nach, daß sowohl die durch den Algorithmus von Abramow berechnete Zerlegung

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{450}\Delta\,\frac{42x^5+255x^4+544x^3+522x^2+236x+60}{(x+2)^2(x+1)^2x^2} \\ &\quad -\frac{1}{150}\frac{14x^2-12x+5}{x^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

als auch

$$f = -\frac{1}{9}\Delta\,\frac{3x^2+6x+2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{3}\frac{x^2+3x+1}{(x+3)^2(x^2+1)}$$

Lösungen des Problems (IRSB) für f sind. Andererseits hat das Nenner-Polynom des rationalen Teils der ersten Lösung den Grad Sechs, während in der zweiten Lösung ein Nenner-Polynom vom Grad Drei auftritt.

Aus der Funktion

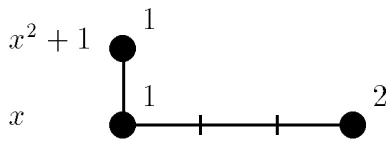
$$f = \frac{1}{x(x+3)^5(x^2+1)}$$

finden wir z.B. mit dem Verfahren von Abramow eine Lösung vom Grad Fünfzehn, während auch Grad Drei möglich wäre.

In diesem Zusammenhang stellt sich die natürliche Frage, ob man den Algorithmus von Abramow insofern ändern kann, als auch der Grad des Nenner-Polynoms des rationalen Teils beschränkt wird.

Um solch eine Änderung zu beschreiben, betrachten wir die in (4.3) angegebene rationale Funktion und verfolgen die Zwischenschritte des Verfahrens.

Die Shift-Struktur der rationalen Funktion hat folgende graphische Darstellung.



Es gilt $dis\ f = 3$. Dem Verfahren folgend, berechnen wir

$$v = part(gcd\,(q, E^3 q), q) = (x+3)^2$$

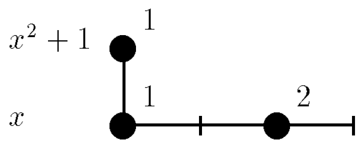
und somit $w = x(x^2+1)$. Nach der Zerlegung

$$f = \frac{a}{v} + \frac{b}{w} = \frac{-\frac{7}{225}x - \frac{19}{150}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{7}{225}x^2 - \frac{3}{50}x + \frac{1}{9}}{x(x^2+1)}$$

erhalten wir die neuen Werte

$$\begin{aligned} u &= E^{-1}\frac{a}{v} = -\frac{1}{450}\frac{14x+43}{(x+2)^2} \\ r &= f - \Delta\, u = -\frac{1}{450}\frac{14x^3+16x^2-49x-200}{x(x+2)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

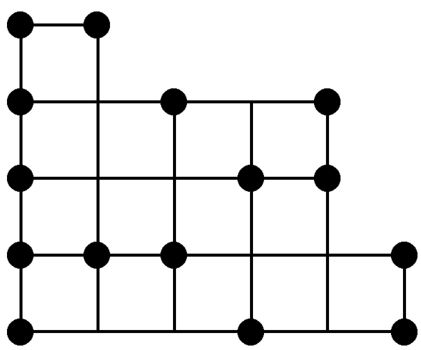
Die Shift-Struktur des Restes sieht dann folgendermaßen aus. Diese entsteht aus dem Graphen zu f durch Verkürzung der längsten Shift-Klasse um einen Knoten.



Durch Iterieren bekommen wir einen neuen rationalen Teil mit $(x+2)^2(x+1)^2$ als Nenner-Polynom und schließlich $x^2(x+1)^2(x+2)^2$.

Beim Verfahren von Abramow ist es wichtig, daß die längste Shift-Klasse verkürzt wird. Das Verfahren sieht vor, daß der rechte Endpunkt gelöscht wird. Man kann aber ebenso den linken Endpunkt löschen.

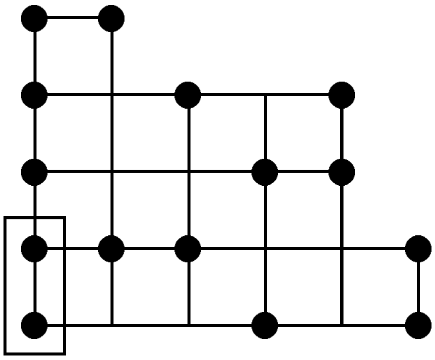
Betrachten wir also wieder eine rationale Funktion $f = p/q \in \mathcal{K}(x)$, mit beispielsweise folgender graphischen Darstellung.



Sei $k = dis\ q$, dann betrachten wir die linken Endpunkten der längsten Shift-Klasse, berechnet durch

$$v = part(gcd\,(q, E^{-k}q), q)$$

welche im folgenden Graphen ausgezeichnet sind.



Mit $w = p/v$ berechnen wir wieder die Zerlegung

$$f = \frac{a}{v} + \frac{b}{w}$$

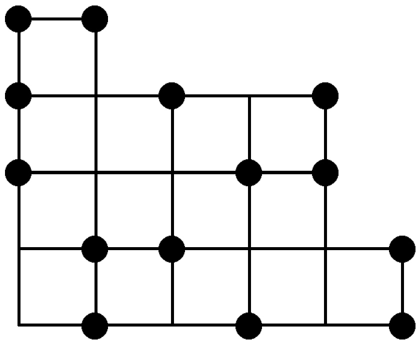
und setzen

$$u = -\frac{a}{v}$$

Daraus ergibt sich

$$r = f - \Delta\, u = \frac{b}{w} + \frac{Ea}{Ev}$$

Es ist offensichtlich, daß $dis\ r < dis\ f$ gilt. Insbesondere bekommen wir folgende graphische Darstellung für den Rest r.



Auf r können wir dann das Verfahren iterativ anwenden.

Somit haben wir für jeden Schritt zwei Möglichkeiten zur Verfügung, um die gewünschte Reduktion der Dispersion zu erzielen: Entweder man entfernt die linken oder die rechten Endpunkte der längsten Shift-Klasse.

Die Entscheidung, welche Endpunkte entfernt werden, soll Rücksicht auf die Auswirkung auf den Grad des Nenner-Polynoms des rationalen Teils nehmen, der vom Grad von v abhängt. Wir wählen also die Endpunkte, für die das dazugehörige Polynom v kleinsten Grad hat.

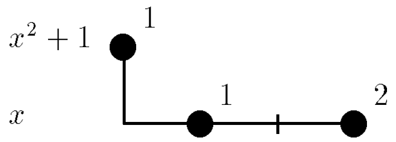
In dem angegebenen Beispiel heißt dies, daß wir zuerst die Shift-Klasse um den linken Endpunkt verkürzen, denn es gilt

$$v = part(gcd(q, E^{-3}q), q) = x$$

Wir erhalten für das Nenner-Polynom von u nur Grad Eins. Wir haben

$$\begin{aligned} u &= -\frac{a}{v} = -\frac{1}{9x} \\ r &= -\frac{2x^4 + 13x^2 + 26x^2 + 22x + 15}{9(x+3)^2(x^2+1)(x+1)} \end{aligned}$$

Graphisch sieht r dann folgendermaßen aus.



Im nächsten Schritt würden wir wieder den linken Endpunkt löschen, denn der Grad des Nenner-Polynoms wäre in dem Falle kleiner als beim Entfernen des rechten Endpunktes.

Nach diesem Verfahren erhalten wir folgende Zerlegung

$$f = -\frac{1}{9}\Delta \frac{3x^2 + 6x + 2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{3}\frac{x^2 + 3x + 1}{(x+3)^2(x^2+1)}$$

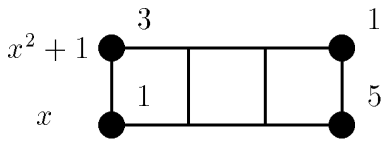
Allgemein kann nicht gesagt werden, daß das Nenner-Polynom des rationalen Teils immer kleineren Grad als beim Algorithmus von Abramow besitzt. Andererseits stellte sich dieser Ansatz bei der Behandlung mehrerer Fälle als vorteilhaft heraus.

Insbesondere ist der dadurch bestimmte rationale Teil in bezug auf diese Eigenschaft noch nicht minimal. Dies kann leicht anhand eines Beispiels erläutert werden.

Betrachten wir die rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ gegeben durch folgende reduzierte Darstellung

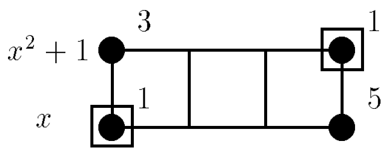
$$f = \frac{p}{q} = \frac{1}{x(x+3)^5(x^2+1)^3(x^2+6x+10)}$$

Aus dem Graphen $ShiftGraph(q)$

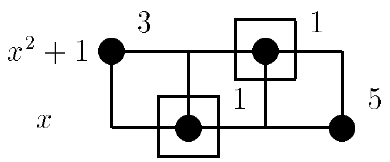


sieht man, daß in diesem Falle die Wahl der zu löschenden Punkte unwichtig ist, denn beide Endpolynome der Shift-Klasse haben denselben Grad, nämlich Sieben. Hier liefert die vorgenommene Erweiterung keine Verbesserung im Vergleich zu Abramow.

Man kann sich aber leicht überlegen, daß die Anwendung der oben dargestellten Beobachtung auf die einzelnen Shift-Äquivalenzklassen eine deutliche Verbesserung mit sich bringen würde. Man könnte durch getrennte Anwendung des Verfahrens folgende ausgezeichnete Punkte löschen,



Wir würden dann einen rationalen Teil vom Grad Drei bekommen, und der Rest würde folgendermaßen aussehen



und wir könnten wieder iterativ vorgehen. Allerdings setzt dies voraus, daß man die Faktorisierung des Polynoms kennt. Solch eine Berechnung bedeutet aber einen deutlichen Mehraufwand in der Implementierung, während die oben vorgeschlagene Erweiterung kaum Nachteile von seiten des Rechenaufwands mit sich bringt, da keine weitere Information über das Polynom q benötigt wird.

Wir stellen das erweiterte Verfahren als Algorithmus dar.

Algorithmus 4.2 *(Zur Berechnung einer Lösung des Problems (IRSB))*

Input: $f \in \mathcal{K}(x)$.
Output: $s, t \in \mathcal{K}(x)$ *mit* $f = \Delta\, s + t$ *und* $dis\ t = 0$.

Bestimme $k \leftarrow dis\ q$.
Setze $u \leftarrow 0$ *und* $r \leftarrow f(= p/q)$.
Wiederhole für $i = k, k-1, \ldots, 1$ *und* $r \neq 0$.
  Berechne $v_r \leftarrow part(gcd(E^i q, q), q)$ *und* $w_r \leftarrow q/v_r$.
  Berechne $v_l \leftarrow part(gcd(E^{-i} q, q), q)$ *und* $w_l \leftarrow q/v_l$.
  Falls $deg\, v_l > deg\, v_r$
    dann *berechne die Zerlegung* $r = a/v_r + b/w_r$.
      Setze $u \leftarrow u + E^{-1}(a/v_r)$.
    sonst *berechne die Zerlegung* $r = a/v_l + b/w_l$.
      Setze $u \leftarrow u - a/v_l$.
  Setze $r \leftarrow r - \Delta\, u(= p/q)$.
Gib u *und* r *als Ergebnis zurück.*

4.4 Die Implementierung

Der Algorithmus von Abramow wurde sowohl im Computer-Algebra System Maple als auch in Axiom implementiert.

Das Verfahren zeichnet sich dadurch aus, daß es eine sehr einfache Realisierung erlaubt. Wir werden sehen, daß dies einen wesentlichen Unterschied zum weiter unten beschriebenen Verfahren von Moenck darstellt.

In Maple wurden beide Algorithmen zur Verfügung gestellt, um Vergleiche der Ergebnisse zu ermöglichen.

Es wurden die Funktionen

`abrsum` `abrsumnew`

definiert, welche als Eingabe eine rationale Funktion und ein Symbol verlangen.

Die Berechnung einer Lösung des Problems (IRSB) für die rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ für $\mathcal{K} = \mathbb{Q}$

$$f = \frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x^2+3)}$$

durch den Algorithmus von Abramow erfolgt durch folgende Aufrufe

```
f:= x/((x+1)*(x+2)**2*(x**2+3));

abrsum(f,x);
```

$$1/49\frac{15x+29}{(x+1)^2} + DINV(1/49\frac{15x^2+13x+54}{(x+1)^2(x^2+3)})$$

Die Berechnung durch den erweiterten Algorithmus liefert

```
abrsumnew(f,x);
```

$$\frac{1}{4(x+1)} + DINV(1/4\frac{x^2+x+6}{(x+2)^2(x^2+3)})$$

In Axiom wurde das Package `ASUM R` definiert, welches die Funktion

`abrsum`

enthält. Dabei soll `R` den Kategorien `IntegralDomain` und `RetractableTo Integer` angehören.

Die Funktion `abrsum` verlangt als Eingabe eine rationale Funktion aus dem Domain `Fraction SparseMultivariatePolynomial (Fraction R, Symbol)` und ein Element aus dem Domain `Symbol`. Durch diese Funktion ist der erweiterte Algorithmus implementiert.

Nach dem Laden des Pakage erfolgt der Aufruf folgendermaßen.

```
(1) ->f:  FRAC SMP(FRAC INT,SYMBOL)

(2) ->f:= x/((x+1)*(x+2)**2*(x**2+3))
```

$$(2) \qquad \frac{x}{x^5+5x^4+11x^3+19x^2+24x+12}$$

```
                              Type:  FRAC SMP(FRAC INT,SYMBOL)
```

```
(3) ->abrsum(f,x)
```

$$(3) \qquad [\frac{\frac{1}{4}}{x+1}, \frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}{x^4+4x^3+7x^2+12x+12}]$$

```
                         Type:  LIST FRAC SMP(FRAC INT,SYMBOL)
```

Das Ergebnis ist eine Liste von rationalen Funktionen, wobei das erste Element der Liste der rationale und das zweite der nicht-rationale Teil der Lösung der indefiniten Summation für f sind.

Chapter 5

Der Algorithmus von Moenck

In diesem Kapitel wird ein Algorithmus beschrieben, der von Moenck entwickelt wurde (s. [Mo]). Dieses Verfahren liefert eine vollständige Lösung der indefiniten Summation für eine beliebige rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$, d.h. eine Zerlegung von $\Delta^{-1} f$ in einen rationalen und einen nicht-rationalen Teil.

Wir beschreiben das Verfahren mit Hilfe des Begriffs Shift-Saturated Form einer rationalen Funktion. Moenck führt in seiner Arbeit eine ähnliche Darstellung ein, die shift free decomposition, welche allerdings in der von Moenck vorgeschlagenen Form nicht ausreichend ist. Deshalb treten auch in der schon vorhandenen Implementierung im System Maple Fälle auf, welche vom Algorithmus nicht behandelt werden können. Zahlreiche solche Beispiele wurden von P. Paule angegeben.

Durch die Verwendung der Shift-Saturated Form von rationalen Funktionen wurde der Algorithmus verbessert und auf Korrektheit überprüft.

Wir werden unten die Stelle im Verfahren deutlich auszeichnen, bei der die Moencksche Darstellung zum Abbruch des Algorithmus führt.

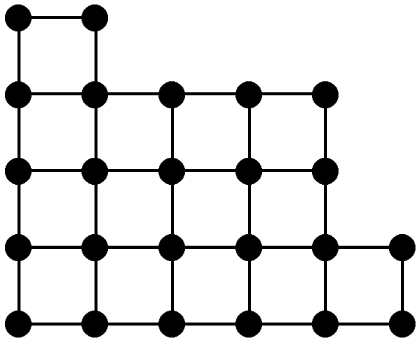
5.1 Das Verfahren

Eine Methode wird vorgestellt, welche das Problem (IRSB) für eine beliebige rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ löst.

Sei also $f \in \mathcal{K}(x)$ gegeben durch die Shift-Saturated Form

$$f = \frac{\alpha}{\beta}$$

Zur Veranschaulichung stellen wir die Shift-Struktur von β graphisch etwa folgendermaßen dar



Wir suchen eine Zerlegung der Form

$$f = \Delta\, s + t$$

wobei $s, t \in \mathcal{K}\,(x)$ und $dis\ t = 0$.

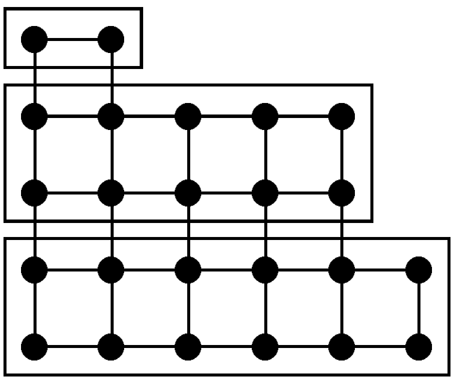
Sei $GFF(\beta) = [\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}$. Aus der Aussage 2 vom Satz 1.4 wissen wir, daß für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt:

$$gcd\,([\beta_i]^{\underline{i}}, [\beta_j]^{\underline{j}}) = 1 \tag{5.1}$$

Wir können also folgende Partialbruch-Zerlegung von f berechnen

$$f = \frac{\alpha}{[\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{[\beta_i]^{\underline{i}}} \tag{5.2}$$

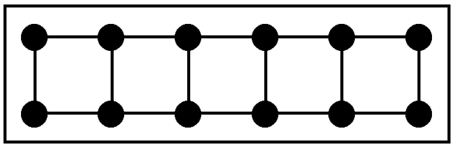
In der graphischen Darstellung heißt es, daß wir die maximalen Shift-Folgen einer bestimmten Länge zusammenlegen.



In seiner Arbeit schlägt Moenck eine Zerlegung von f vor, die shift free decomposition. Seine sehr ungenaue Beschreibung der Eigenschaften und der Berechnung solch einer Zerlegung läßt aber den Schluß nicht zu, daß eine ähnliche

Bedingung wie (5.1) gilt. Somit ist es nicht gewährleistet, daß die Partialbruch-Zerlegung (5.2) überhaupt durchführbar ist.

Wir konzentrieren uns jetzt auf $[\beta_n]^{\underline{n}}$ und lösen das Problem (IRSB) nur für diesen faktoriellen Teil.



Im folgenden werden wir eine Zerlegung der Form

$$\frac{\alpha_n}{[\beta_n]^{\underline{n}}} = \Delta \, \frac{\tau}{[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\delta}{[\beta_n]^{\underline{n-1}}} \tag{5.3}$$

berechnen. Dafür benötigen wir die vollständige Partialbruch-Zerlegung

$$\frac{\alpha_n}{[\beta_n]^{\underline{n}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{n,i}}{[\beta_n]^{\underline{i}}} \tag{5.4}$$

mit $deg\, \alpha_{n,i} < deg\, \beta_n$.

Aus dem Satz 1.4 wissen wir, daß β_n und $E^{-n+1}\beta_n$ teilerfremd sind. Es gilt also

$$gcd\,(E^{-n+1}\beta_n, \beta_n - E^{-n+1}\beta_n) = 1$$

und wir finden deshalb, etwa durch den euklidschen Algorithmus, zwei Polynome $p, q \in \mathcal{K}\,[x]$ so, daß

$$p(E^{-n+1}\beta_n) + q(\beta_n - E^{-n+1}\beta_n) = \alpha_{n,n}$$

Dies liefert uns folgende Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n,n}}{[\beta_n]^{\underline{n}}} &= \frac{p(E^{-n+1}\beta_n)}{[\beta_n]^{\underline{n}}} + \frac{q(\beta_n - E^{-n+1}\beta_n)}{[\beta_n]^{\underline{n}}} \\ &= \frac{p}{[\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{q(\beta_n - E^{-n+1}\beta_n)}{[\beta_n]^{\underline{n}}} \end{aligned}$$

Wiederum gilt nach dem Lemma 1.1

$$\Delta(h \cdot g) = h\Delta\, g + (Eg)\Delta\, h \tag{5.5}$$

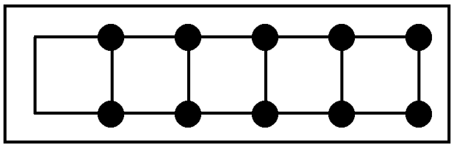
und somit

$$\begin{aligned} \Delta \frac{q}{[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} &= q\left(\frac{1}{[\beta]^{\underline{n-1}}} - \frac{1}{[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}}\right) + \frac{\Delta\, q}{[\beta_n]^{\underline{n-1}}} \\ &= q\,\frac{E^{-n+1}\beta_n - \beta_n}{[\beta_n]^{\underline{n}}} + \frac{\Delta\, q}{[\beta_n]^{\underline{n-1}}} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß wir die gesuchte Darstellung (5.3) berechnen können.

$$\frac{\alpha_{n,n}}{[\beta_n]^{\underline{n}}} = \Delta \frac{-q}{[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\Delta\, q + p}{[\beta_n]^{\underline{n-1}}} \tag{5.6}$$

Wir bekommen also einen Rest mit einer kleineren Dispersion. In der graphischen Darstellung des Nenner-Polynoms bedeutet dies, daß wir die linken Endpunkte gelöscht haben.



Iterieren wir diese Berechnung auf den dadurch gewonnenen Rest, so bekommen wir eine Zerlegung der Form

$$\frac{\alpha_{n,n}}{[\beta_n]^{\underline{n}}} = \Delta \frac{\tau'}{[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\delta'}{\beta_n} \tag{5.7}$$

wobei entweder $\delta' = 0$ oder $dis\ (\delta'/\beta_n) = 0$.

Somit sind wir in der Lage, aus jedem faktoriellen Teil der Partialbruch-Zerlegung (5.4), also auch auch aus jedem Teil der Zerlegung (5.2) einen nicht aufsummierbaren Rest zu berechnen, der nur aus den rechten Endpunkten der dazugehörigen Shift-Klassen besteht.

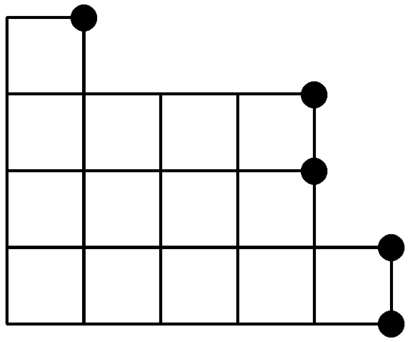
Zusammenfassend liefert uns diese Berechnung für die gesamte Funktion f folgende Zerlegung

$$f = \Delta \frac{\rho}{[E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}} \cdots [E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\sigma}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} \tag{5.8}$$

Aus dem Satz 1.4 ist bekannt, daß

$$dis\ (\beta_1\beta_2\cdots\beta_n) = 0$$

Somit ist der nicht aufsummierbare Teil in der rechten Seite der Gleichung (5.8) Bound für f. Graphisch sieht die Shift-Struktur des so bestimmten Bounds für f wie folgt aus



Wegen der Verwendung der Gleichung (5.5) spricht man auch von der Methode der **partiellen Summation**. Moenck nennt sein Verfahren **Hermite Summation**, denn die Analogie zur partiellen Integration ist offensichtlich.

5.2 Beispiel

Wir wenden jetzt den Algorithmus von Moenck auf folgende rationale Funktion $f \in \mathbb{Q}(x)$ an.

$$f = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2}$$

Wir bestimmen also s und t aus $\mathbb{Q}(x)$ so, daß

$$f = \Delta\ s + t$$

und t ist Bound für f. Zuerst berechnen wir die Shift-Saturated Form der Funktion f. Wir erhalten

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-x^2 - 3x - 3}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{2}}}$$

Die vollständige Partialbruch-Zerlegung sieht folgendemaßen aus

$$f = \frac{-3x - 5}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{2}}} - \frac{1}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{1}}}$$

Es gilt $gcd(E^{-1}(x^2 + 2x - 1), (x^2 + 2x - 1) - E^{-1}(x^2 + 2x - 1)) = 1$ und wir finden Polynome p und q so, daß

$$pE^{-1}(x^2 + 2x - 1) + q(x^2 + 2x - 1 - E^{-1}(x^2 + 2x - 1)) = -3x - 5$$

Wir haben $p = 2$ und $q = -x - 1$ und somit

$$f \quad = \quad \frac{-(x+1)(2x+1)}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{2}}} + \frac{2(x^2 - 2)}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{2}}} - \frac{1}{[x^2 + 2x - 1]^{\underline{1}}}$$

$$= \frac{-(x+1)(2x+1)}{[x^2+2x-1]^{\underline{2}}} + \frac{1}{[x^2+2x-1]^{\underline{1}}} \tag{5.9}$$

Wegen (5.5) gilt ferner mit $E^{-1}(x^2+2x-1) = x^2-2$

$$\begin{aligned} \frac{-(x+1)(2x+1)}{[x^2+2x-1]^{\underline{2}}} &= \Delta\frac{x+1}{[x^2-2]^{\underline{1}}} - \frac{E(-x-1)-(-x-1)}{E(x^2-2)} \\ &= \Delta\frac{x+1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+2x-1} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Wenn wir (5.10) in (5.9) einsetzen, dann erhalten wir die Lösung der indefiniten Summation durch

$$f = \Delta\frac{x+1}{x^2-2}$$

5.3 Die Implementierung

Der Algorithmus von Moenck ist im Computer-Algebra System Maple zur Bestimmung der indefiniten Summation für rationale Funktionen bereits implementiert.

In dieser Implementierung wurden die Lücken, die in der Arbeit von Moenck auftreten, nicht behoben. Aus diesem Grunde kann man rationale Funktionen angeben, für welche der Algorithmus fehlerhaft abbricht, ohne ein Ergebnis zu liefern.

Viele Beispiele für die Unvollständigkeit der verfügbaren Implementierung wurden von P. Paule gefunden.

In diesem Abschnitt zeigen wir das Verhalten des Algorithmus anhand eines Beispiels von P. Paule.

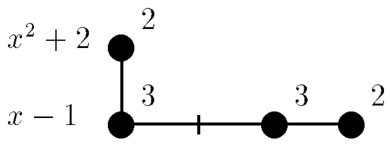
Betrachten wir die rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ für $\mathcal{K} = \mathbb{Q}$ gegeben durch

$$f = \frac{p}{q} = \frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3(x+2)^2(x^2+2)^2}$$

Da die vollständige Zerlegung von q über $\mathbb{Q}$ gegeben ist, sieht man sofort, daß $dis\ q = 3$. Wir benötigen die Shift-Saturated Form von f

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{[\beta_1]^{\underline{1}}\cdots[\beta_4]^{\underline{4}}}$$

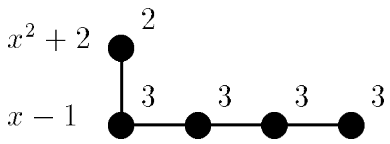
Aus folgender graphischen Darstellung der Shift-Struktur von p kann $ShiftSat(p)$ sofort abgelesen werden.



Es gilt

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(x+2)x^3}{[(x^2+2)^2]^{\underline{1}}[(x+2)^3]^{\underline{4}}}$$

Dies kann folgendermaßen graphisch dargestellt werden.



In der bisherigen Implementierung wurde aber folgende Darstellung berechnet

$$f = \frac{x^3}{[(x^2+2)^2]^{\underline{1}}[x+1]^{\underline{3}}[(x+2)^2]^{\underline{4}}}$$

Der Grund liegt im wesentlichen darin, daß die Vielfachheit des rechten Endpunktes der Shift-Äquivalenzklasse kein Teiler der Vielfachheiten der anderen Punkte in der Klasse ist. In diesem Beispiel ist der rechte Endpunkt mit 2 bewertet, während in der Klasse auch die Vielfachheit 3 auftritt.

Auf die letzte Darstellung kann natürlich der Algorithmus nicht weiter angewendet werden, da die einzelnen faktoriellen Teile nicht paarweise teilerfremd sind. Somit ist die Partialbruch-Zerlegung (5.2) nicht berechenbar und die Implementierung bricht ab.

In Maple bekommt man für das vorgestellte Beispiel folgende Meldung vom System

```
> sum ( 1/((k+2)**2*(k**2+2)**2*(k**2-1)**3, k);

Error, (in gcdex/diophant) wrong number (or type) of arguments
```

Eine Änderung wurde vorgenommen, welche die Shift-Saturated Form der rationalen Funktion korrekt durch den Algorithmus 1.4 berechnet. Aus dieser Funktion bekommt man folgendes Ergebnis

```
> sumnew(f,k)
```

$$-\frac{1}{11664}\frac{102k^8 - 81k^7 - 157k^6 + 189k^5 - 370k^4 + 477k^3 - 61k^2 + 63k - 18}{k^3(k-1)^3(k+1)^3}$$

$$+ DINV\left(-\frac{1}{1944}\,\frac{17k^5+58k^4+140k^3+376k^2+284k+664}{(k+2)^3(k^2+2)^2}\right)$$

wobei das Argument von $DINV$ Bound für f ist.

Chapter 6

Der Algorithmus von Paule

In diesem Kapitel wird ein weiterer Ansatz zur Lösung des Problems (IRSB) beschrieben, der von Peter Paule stammt (s. [Pa92]).

Es stellt sich heraus, daß in der Arbeit von Paule zwei Methoden zur Lösung des Problems enthalten sind.

Die erste Methode geht iterativ vor und isoliert in jedem Schritt aus der gegebenen rationalen Funktion f einen aufsummierbaren Teil so, daß der Rest eine kleinere Dispersion als f besitzt. Dadurch wird, ähnlich wie bei den Verfahren von Moenck und Abramow, durch iterierte Anwendung eine Lösung der indefiniten Summation berechnet.

Die zweite Methode basiert auf einer Analogie zum Verfahren von Horowitz zur Integration rationaler Funktionen. Das Verfahren führt zur Aufstellung eines linearen Gleichungssystems, auf dessen Lösung das Problem der indefiniten Summation zurückgeführt wird. Wegen dieser Analogie nennt Paule seinen Algorithmus auch **Horowitz Summation**.

Die Verfahren werden mit Hilfe der ebenfalls von Paule eingeführten Begriffe über die Shift-Struktur von rationalen Funktionen dargestellt.

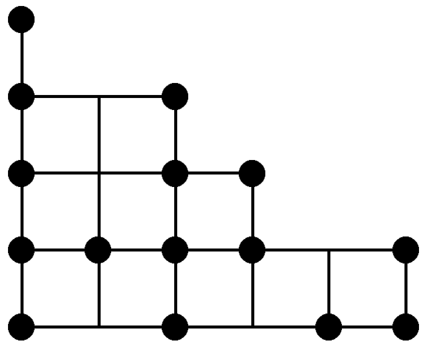
Am Ende werden zusammenfassend die grundlegenden Unterschiede der in den letzten Kapiteln vorgestellten Algorithmen behandelt.

6.1 Das Verfahren

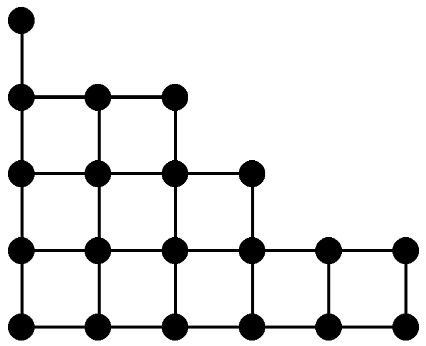
Betrachten wir eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ gegeben durch die reduzierte Darstellung $f = p/q$. Wir lösen das Problem (IRSB) für f, d.h. wir finden eine Zerlegung der Form

$$f = \Delta\, s + t$$

wobei t Bound für f ist. Zur Veranschaulichung nehmen wir an, daß die Shift-Struktur von q folgendermaßen dargestellt wird.



Ferner sei α/β Shift-Saturated Form von f. Der Graph zu $\beta = [\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}$ ist dann wie in folgender Abbildung.



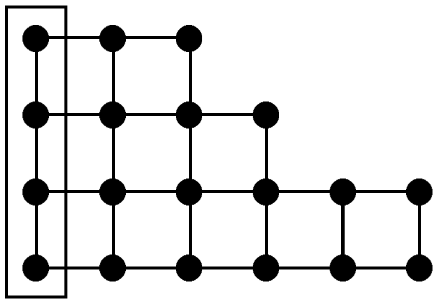
Wir interessieren uns nur für die Shift-Klassen, die eine größere Länge als Eins besitzen. Wegen

$$gcd\,(\beta_1, [\beta_2]^{\underline{2}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}) = 1$$

können wir f auch folgendermaßen zerlegen, indem wir zwei Polynome a und b aus $\mathcal{K}\,[x]$ berechnen.

$$f = \frac{a}{\beta_1} + \frac{b}{[\beta_2]^{\underline{2}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}}}$$

Deshalb beschränken wir uns auf die rationalen Funktionen $f = \alpha/\beta$, für welche $\beta_1 = 1$ gilt. Der eventuell auftretende β_1-Teil kann sofort als nicht-rationaler Rest behandelt werden. In unserem Beispiel heißt dies, daß wir folgenden Graphen betrachten

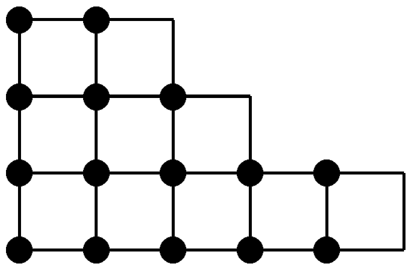


Auch beim Verfahren von Paule gehen wir iterativ vor und geben eine Methode an, um die Funktion f in

$$f = \Delta\, u + r$$

zu zerlegen, wobei $dis\ r < dis\ f$ gilt. Wir werden das Nenner-Polynom von r dadurch bekommen, daß wir die linken Endpunkten der Äquivalenzklassen von β entfernen. Diese Punkte sind in der letzten Abbildung ausgezeichnet.

Sei $\delta = gcd(\beta, E^{-1}\beta)$. Wie wir schon gesehen haben, entsteht das Polynom δ aus β durch Löschen der rechten Endpunkte aller Äquivalenzklassen.



Die Polynome β/δ bzw. $\beta/E\delta$ bestehen dann aus den rechten bzw. linken Endpunkten jeder Shift-Klasse von β. Da wir angenommen haben, daß $\beta_1 = 1$ gilt, haben wir

$$gcd(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\beta}{E\delta}) = 1$$

denn die auftretenden gemeinsamen Teiler können nur Polynome aus einer Klasse der Länge Eins enthalten, also Teiler von β_1.

Dies ermöglicht uns, zwei Polynome τ und ρ aus $\mathcal{K}[x]$ zu berechnen, für welche gilt

$$\alpha = \frac{\beta}{\delta}\,\tau + \frac{\beta}{E\delta}\,\rho$$

und $deg\,\tau < deg\,(\beta/E\delta)$. Wenn wir jetzt das Polynom η definieren durch

$$\rho = E\tau + \eta$$

dann bekommen wir die Gleichung

$$\alpha = \frac{\beta}{E\delta}\,E\tau + \frac{\beta}{\delta}\,\tau + \frac{\beta}{E\delta}\,\eta$$

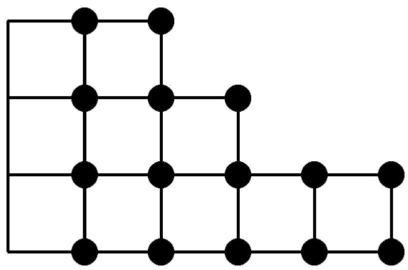
Durch Dividieren beider Seiten der letzten Gleichung durch β erhalten wir

$$\frac{\alpha}{\beta} = \Delta\,\frac{\tau}{\delta} + \frac{\eta}{E\delta}$$

Diese ist die gesuchte Zerlegung, wobei für den Rest offensichtlich gilt

$$dis\,(\frac{\eta}{E\delta}) < dis\,f$$

In unserem Beispiel sieht der Graph zu $E\delta$ wie folgt aus.



Diese Methode kann dann iterativ auf den Rest angewendet werden, um eine Lösung des Problems (IRSB) für f zu bestimmen. Dabei muß man beachten, daß die Klasse der Länge Eins wieder durch eine geeignete Zerlegung entfernt wird.

Als Ergebnis der iterierten Anwendung des Verfahrens bekommen wir eine Zerlegung der Form

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \Delta\,\frac{\gamma}{[E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}}\cdots[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\varepsilon}{\beta_1\cdots\beta_n} \tag{6.1}$$

Das Verfahren von Paule liefert also eine Lösung in ähnlicher Form wie das Verfahren von Moenck. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß solch eine Zerlegung eindeutig ist. Nehmen wir an, wir hätten zwei Zerlegungen der Form (6.1), etwa

$$\Delta\,\frac{\gamma}{[E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}}\cdots[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\varepsilon}{\beta_1\cdots\beta_n} = \Delta\,\frac{\gamma'}{[E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}}\cdots[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} + \frac{\varepsilon'}{\beta_1\cdots\beta_n} \tag{6.2}$$

Wir hätten dann

$$\Delta\,\frac{\gamma-\gamma'}{[E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}}\cdots[E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}} = \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\beta_1\cdots\beta_n} \tag{6.3}$$

Für $\varepsilon \neq \varepsilon'$ und $\gamma \neq \gamma'$ bedeutet dies, daß eine rationale Lösung der indefiniten Summation für die rationale Funktion in der rechten Seite von (6.3) existiert. Da aber $dis\,(\beta_1 \cdots \beta_n) = 0$ gilt, wäre das ein Widerspruch zum Satz 1.6. Es gilt also

$$\gamma = \gamma' \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \varepsilon'$$

Deshalb liefern die Methoden von Paule und Moenck genau die gleichen Zerlegungen (6.1) und (5.8).

Zur Integration von rationalen Funktionen ist u. a. das Verfahren von Horowitz bekannt. Dies basiert auf folgender Tatsache.

Sei die rationale Funktion $f \in \mathcal{K}\,(x)$ durch ihre reduzierte Darstellung $f = p/q$ gegeben. Sei ferner $q = q_1^1 q_2^2 \cdots q_n^n$ die quadratfreie Zerlegung des Nenner-Polynoms. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome c und e aus $\mathcal{K}\,[x]$, für welche gilt

$$f = \frac{p}{q} = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{b_2^1 b_3^2 \cdots b_n^{n-1}}\right) + \frac{e}{b_1 b_2 \cdots b_n} \tag{6.4}$$

und

$$deg\, c < deg\, d, \qquad deg\, e < deg\, \frac{q}{d}$$

wobei $d = gcd\,(q, \frac{d}{dx}q) = b_2^1 b_3^2 \cdots b_n^{n-1}$. Wir schreiben die Gleichung (6.4) um in

$$p = \frac{q}{d}\left(\frac{d}{dx}c\right) - \left(\frac{d}{dx}d\right)\frac{q}{d^2}c + de \tag{6.5}$$

Das Problem kann also durch Koeffizientenvergleich gelöst werden. Dies führt zur Aufstellung eines linearen Gleichungssystems mit den Koeffizienten von c und e als Unbekannte.

In Analogie dazu schreiben wir die Gleichung (6.1) folgendermaßen.

$$\alpha = \frac{\beta}{E\delta}(E\gamma) - \frac{\beta}{\delta}\gamma + \delta\varepsilon \tag{6.6}$$

Da der Grad der Polynome γ und ε abgeschätzt ist durch

$$deg\,\gamma < deg\,([E^{-1}\beta_2]^{\underline{1}} \cdots [E^{-1}\beta_n]^{\underline{n-1}}), \qquad deg\,\varepsilon < deg\,(\beta_1 \cdots \beta_n)$$

können wir die Gleichung (6.6) durch Koeffizientenvergleich lösen. Das entspricht wiederum der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit den Koeffizienten von γ und ε als Unbekannten.

Aus diesem Grunde spricht Paule von der **Horowitz Summation**.

6.2 Die Algorithmen

Paule gibt in seiner Arbeit [Pa92] die Horowitz Summation als Methode an. Hier ist auch sein iteratives Verfahren als Algorithmus dargestellt.

Insgesamt beschreiben wir also zwei Algorithmen, die auf die oben erläuterten Überlegungen von Paule basieren.

Algorithmus 6.1 *(Zur Berechnung einer Lösung des Problems (IRSB))*

Input: *rationale Funktion* $f \in \mathcal{K}(x)$.
Output: *Zerlegung* $f = \Delta\,\gamma + \varepsilon$ *mit* ε *Bound für* f.
Berechne $\beta \leftarrow [\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_n]^{\underline{n}} = ShiftSat(\text{denom } f)$.
Berechne $\delta \leftarrow gcd(\beta, E^{-1}\beta)$.
Löse die Gleichung $f\beta = (\beta/E\delta)(E\gamma) - (\beta/\delta)\gamma + \delta\varepsilon$ *nach* $\gamma, \varepsilon \in \mathcal{K}[x]$.
Gib γ *und* ε *als Ergebnis zurück.*

Die Überlegungen aus dem letzten Abschnitt sichern, daß die aufgestellte Gleichung eindeutig lösbar ist. Dabei ist zu beachten, daß Schranken für den Grad der Polynome angegeben sind.

Algorithmus 6.2 *(Zur Berechnung einer Lösung des Problems (IRSB))*

Input: *rationale Funktion* $f \in \mathcal{K}(x)$.
Output: *Zerlegung* $f = \Delta\, s + t$ *mit* t *Bound für* f.
Setze $r \leftarrow f$, $t \leftarrow 0$, $s \leftarrow 0$.
Berechne $n \leftarrow dis\ f + 1$.
Wiederhole für $i = n, n-1, \ldots, 1$
Berechne $\beta \leftarrow [\beta_1]^{\underline{1}} \cdots [\beta_i]^{\underline{i}} = ShiftSat(\text{denom } r)$.
Berechne die Zerlegung $f = a/\beta_1 + b/([\beta_2]^{\underline{2}} \cdots [\beta_i]^{\underline{i}})$.
Setze $t \leftarrow t + a/\beta_1$, $\alpha \leftarrow b$, $\beta \leftarrow \beta/\beta_1$.
Berechne $\delta \leftarrow gcd(\beta, E^{-1}\beta)$.
Berechne die Darstellung $\alpha = (\beta/E\delta)\rho + (\beta/\delta)\tau$.
Berechne $\eta \leftarrow \rho - E\tau$.
Setze $r \leftarrow \eta/E\delta$, $s \leftarrow s + \tau/\delta$.
Gib s *und* t *als Ergebnis zurück.*

Aus dem letzten Abschnitt ist klar, daß die Berechnung von $ShiftSat(\text{denom } r)$ nur einmal erfolgen muß. In den weiteren Schritten kann die neue Shift-Saturated Extension aus der alten bestimmt werden.

6.3 Beispiel

Wir wenden das Verfahren auf eine rationale Funktion f aus $\mathbb{Q}(x)$ an. Sei f gegeben durch

$$f = \frac{1}{x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x}$$

Wir berechnen zuerst die Shift-Saturated Form von f.

$$f = \frac{x - \frac{1}{2}}{[x]^{\underline{1}}[1]^{\underline{2}}[x + \frac{1}{2}]^{\underline{3}}}$$

Der erste Schritt des Verfahrens isoliert im Nenner-Polynom die Shift-Äquivalenzklasse der Länge Eins, d.h. den faktorielle Teil $[x]^{\underline{1}}$. Wir erhalten

$$f = -\frac{\frac{4}{3}}{[x]^{\underline{1}}} + \frac{\frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{[x + \frac{1}{2}]^{\underline{3}}}$$

und konzentrieren uns auf den zweiten Summanden der rechten Seite der Gleichung. Wir behandeln also folgende rationale Funktion, gegeben durch die Shift-Saturated Form

$$\tilde{f} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{[x + \frac{1}{2}]^{\underline{3}}}$$

Da $\delta = gcd(\beta, E^{-1}\beta) = [x - 1/2]^{\underline{2}}$ gilt, haben wir folgende Zerlegung

$$\alpha = -\frac{\beta}{E\delta} + \frac{\beta}{\delta}(-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3})$$

Im Algorithmus heißt dies, daß $\rho = -1$ und $\tau = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$. Daraus berechnet man

$$\eta = \rho - E\tau = \frac{4}{3}(x - 1)$$

und schließlich die Zerlegung

$$\frac{\alpha}{\beta} = \Delta \frac{-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}}{(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})} + \frac{\frac{4}{3}(x - 1)}{(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})}$$

Betrachten wir jetzt den Rest in dieser Zerlegung. Wir wenden das Verfahren iterativ auf diese rationale Funktion an und bekommen folgende Zerlegung

$$\frac{\frac{4}{3}(x-1)}{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \Delta\, \frac{\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{4}{3}}{x+\frac{1}{2}}$$

Der Rest hat Dispersion Null und der Algorithmus terminiert. Zusammenfassend erhält man somit folgende Lösung des Problems (IRSB) für f.

$$f = \frac{1}{x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x} = \Delta\, \frac{-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})} - \frac{\frac{4}{3}}{x(x+\frac{1}{2})}$$

Chapter 7

Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden einige wichtige Aspekte der vorgestellten Verfahren behandelt.

Beide Verfahren von Gosper und Abramow, welche eine Lösung des Problems (IRS) berechnen, basieren auf die Aufstellung und Lösung eines linearen Gleichungssystems mit polynomialen Einträgen. Die Aufstellung des Systems ist bei jedem Verfahren unterschiedlich. Der Aufwand ist aber in wesentlichem vergleichbar.

Größeren Wert haben wir auf die Algorithmen gelegt, die eine Lösung des Problems (IRSB) berechnen. Die Horowitz Summation von Paule ist die einzige Methode, die auch für dieses Problem auf die Behandlung eines linearen Gleichungssystems zurückführt. Die Berechnung der Shift-Saturated Form einer rationalen Funktion spielt eine wesentliche Rolle im Algorithmus.

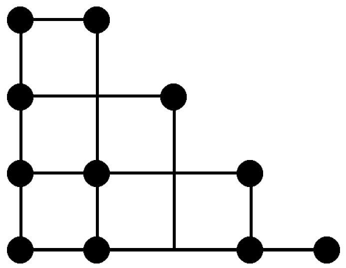
Die anderen drei vorgestellten Methoden von Moenck, von Abramow und von Paule verfolgen einen anderen Weg. Für eine beliebige rationale Funktion $f \in \mathcal{K}(x)$ liefert jeder der Algorithmen eine Darstellung der Form

$$f = \Delta\, s + t$$

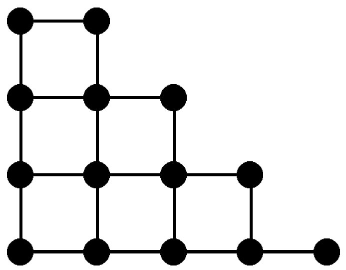
mit t Bound für f. Die drei Methoden gehen iterativ vor, indem sie schrittweise die Dispersion des Restes solch einer Zerlegung verkleinern. Schließlich hat der Rest Dispersion Null und wegen der Linearität des Operators Δ kann s durch die Summe aller rationalen Teile der Zwischenergebnisse berechnet werden.

Die wesentlichen Unterschiede zwischen den Verfahren liegen in der Methode, welche diese Verkleinerung des Restes bewirkt.

Sei zur Veranschaulichung die Funktion $f = p/q$ so, daß das Nenner-Polynom folgende graphische Darstellung hat.



Die Verfahren von Moenck und Paule, sowie die Horowitz Summation, benötigen die Shift-Saturated Form der rationalen Funktion.



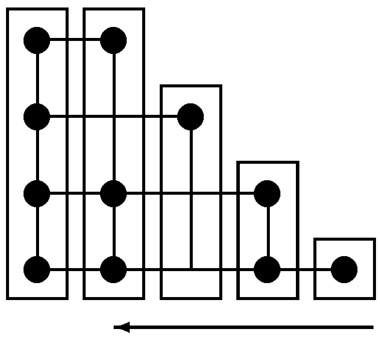
Der Algorithmus von Abramow benötigt diese Information nicht. Abramow verlangt nur den Wert der Dispersion der Funktion, welcher übrigens von jedem Verfahren hier verwendet wird.

Bei Moenck ist weiter eine vollständige Partialbruch-Zerlegung zu berechnen, um die einzelnen Shift-Äquivalenzklassen im Nenner-Polynom zu isolieren und dann getrennt zu behandeln.

Jede Äquivalenzklasse wird schrittweise um einen Knoten verkürzt, indem der linke Endpunkt der Klasse entfernt wird. Dadurch wird jede Klasse einzeln soweit reduziert, bis nur ein Knoten, also ein Polynom der Dispersion Null, oder keiner übrigbleibt. Die Zerlegungen für jede Klasse werden dann aufsummiert und liefern die gewünschte Darstellung der rationalen Funktion. Die Abarbeitung jeder Klasse bedeutet natürlich einen deutlichen Aufwand.

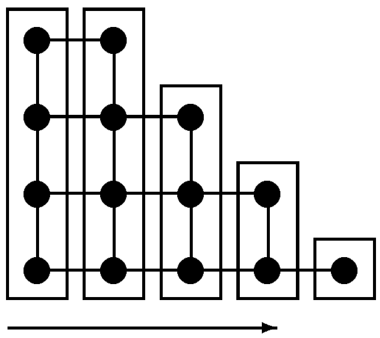
Auch der Algorithmus von Abramow reduziert die längste Shift-Äquivalenzklasse um einen Knoten. Allerdings wird der rechte Endpunkt der Klasse entfernt.

Der Graph wird „spaltenweise von rechts" verkürzt. Dabei ist wichtig, daß nicht nur eine Klasse, sondern der ganze Graph bei jedem Schritt behandelt wird. D.h. bei jedem Schritt wird eine weitere Shift-Klasse von q beeinflußt.



Die vorgenommene Ergänzung des Verfahrens bringt keine wesentliche Änderung bzgl. dieser Betrachtungen.

Der Graph wird auch beim Verfahren von Paule „spaltenweise“ bearbeitet. Allerdings werden die linken Endpunkte entfernt und somit werden bei jedem Schritt alle Shift-Klassen verkürzt. Das zieht nach sich, daß der Grad des Restes wesentlich schneller abnimmt.



Andererseits behandelt Paule die Shift-Saturated Extension des Nenner-Polynoms. Dabei werden also i. allg. wesentlich höhere Grade auftreten als bei Abramow, bei dem die Sättigung nicht durchgeführt wird.

Ein einfaches Beispiel kann dieses Verhalten verdeutlichen. Betrachten wir die Funktion

$$f = \frac{1}{x(x+10)^6}$$

Für die Shift-Saturated Form gilt

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{x^5[(x+9)]^{\underline{9}}}{[(x+10)^6]^{\underline{11}}}$$

Das bedeutet, daß die Verfahren von Paule und Moenck mit dem Polynom β vom Grad 66 arbeiten. Der Grad verringert sich bei jedem Schritt nur um Sechs. Es ist aber zu beachten, daß bei der Bestimmung der Zerlegung

$$\alpha = \frac{\beta}{\delta}\tau + \frac{\beta}{E\delta}\rho$$

die Polynome β/δ bzw. $\beta/E\delta$ nur die rechten bzw. linken Endpunkte jeder Shift-Klasse enthalten. Weiter ist die Shift-Saturated Form des Restes aus diesen Endpunkten sofort ablesbar, also nicht mehr zu berechnen. Abramow ist dabei nur mit einem Polynom vom Grad Sieben konfrontiert und bei jedem Schritt verringert sich der Grad nicht.

Während also das Verfahren von Moenck mit Sicherheit das aufwendigste im Vergleich zu Paule und Abramow ist, da eine große Vorarbeit geleistet werden muß, fällt die Bewertung über die Methoden von Paule und Abramow nicht so leicht.

Die Ergebnisse der Verfahren von Moenck und von Paule sind, wie wir gesehen haben, identisch. Das Nenner-Polynom des Restes enthält nur rechte Endpunkte von Shift-Äquivalenzklassen. Das Verfahren von Abramow liefert einen Rest, dessen Nenner-Polynom die linken Endpunkte der Shift-Klassen enthält.

In diesem Zusammenhang ist unserer Meinung nach der Grad des berechneten rationalen Teils von großer Bedeutung. Die vorgeschlagene Erweiterung des Algorithmus von Abramow liefert uns einen rationalen Teil, welcher bei vielen Beispielen kleineren Grad im Nenner-Polynom besitzt als die durch die anderen Verfahren berechnete Zerlegungen. Wie wir an einem Beispiel gezeigt haben, kann diese Abweichung sehr deutlich sein.

Diese Erweiterung benötigt ferner keine weitere Information über die Shift-Struktur der rationalen Funktion und verlangt keinen zusätzlichen Aufwand in der Implementierung.

Bibliography

[A71] S. A. Abramow, *On the summation of rational functions*, Zh. vychisl. Mat. mat. fis., 11, N. 4, 1071-1074, 1971

[A74] S. A. Abramow, *Solution of linear finite difference equations with constant coefficients in the field of rational functions*, Zh. vychisl. Mat. mat. fis., 14, N. 4, 1067-1070, 1974

[A75] S. A. Abramow, *The Rational Component of The Solution of a First-Order Linear Recurrence Relation with a Rational Right Side*, Zh. vychisl. Mat. mat. fis., 15, N. 4, 1035-1039, 1975

[A89] S. A. Abramow, *Some algorithms of rational function algebra*, In Proceedings of EUROCAL'87, J.H. Davenport (Ed.), LNCS 378, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989, pp. 45-47

[BeO] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill 1978

[Bo] G. Boole, *Calculus of finite differences*, J. F. Moulton Hrsg., New York Chelsea 1965

[Co] G. E. Collins, *Computer Algebra of Polynomials and Rational Functions*, American Mathematical Monthly 80 (1973), pp. 725-755

[Ge] A. O. Gel'fond, *Differenzenrechnung*, Berlin Dt. Verlag d. Wiss. 1958

[Go] R. W. Gosper, *Decision Procedure for Indefinite Hypergeometric Summation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 75, 1978, pp. 40-42

[GKP] R.L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1989

[Ho] J. Hornegger, *Hypergeometrische Summation und Polynomiale Rekursion*, Diplomarbeit, Erlangen, 1992

[KePe] W. G. Kelley, A. C. Peterson, *Difference equations*, Acad. Press 1991

[La] J. C. Lafon, *Summation in finite terms*, Computer Algebra, Symbolic and Algebraic Computation, Springer Verlag, 1983

[Li92a] P. Lisoněk, *Algorithms for rational function summation*, RISC Linz, 1992 (not published)

[Li92b] P. Lisoněk, *The performance of Gosper's Algorithm on rational function inputs*, RISC Linz, 1992 (not published)

[Li92c] P. Lisoněk, *Symbolic Summation Methods (an annotated bibliography)*, RISC Linz, 1992 (not published)

[LPS] P. Lisoněk, P. Paule, V. Strehl, *Improvement of the Degree Setting in Gosper's Algorithm*, submitted to J. of Symb. Comput.

[Mo] R. Moenck, *On computing closed forms for summations*, Proceedings of MACSYMA users' conference, Berkley, pp. 225-236, 1977

[Pa91] P. Paule, *Summationsalgorithmen*, Vortrag im Rahmen der Sommerschule „Konstruktive Anwendungen in Algebra und Kombinatorik", Thurnau, 1991

[Pa92] P. Paule, *Greatest-Factorial Factorization and Symbolic Summation I*, 1992, submitted to J. Symb. Comput.

[Pe1] M. Petkovšek, *A Generalisation of Gosper's Algorithm*, University of Ljubljana

[Pe2] M. Petkovšek, *Hypergeometric Solutions of Linear Recurrences with Polynomial Coefficients*, J. Symb. Comput., to appear

[Sp] M. R. Spiegel, *Endliche Differenzen und Differenzengleichungen*, McGraw-Hill 1982

[SuMa] T. N. Subramaniam, D. E. G. Malm, *How to Integrate Rational Functions*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, N. 8, 1992